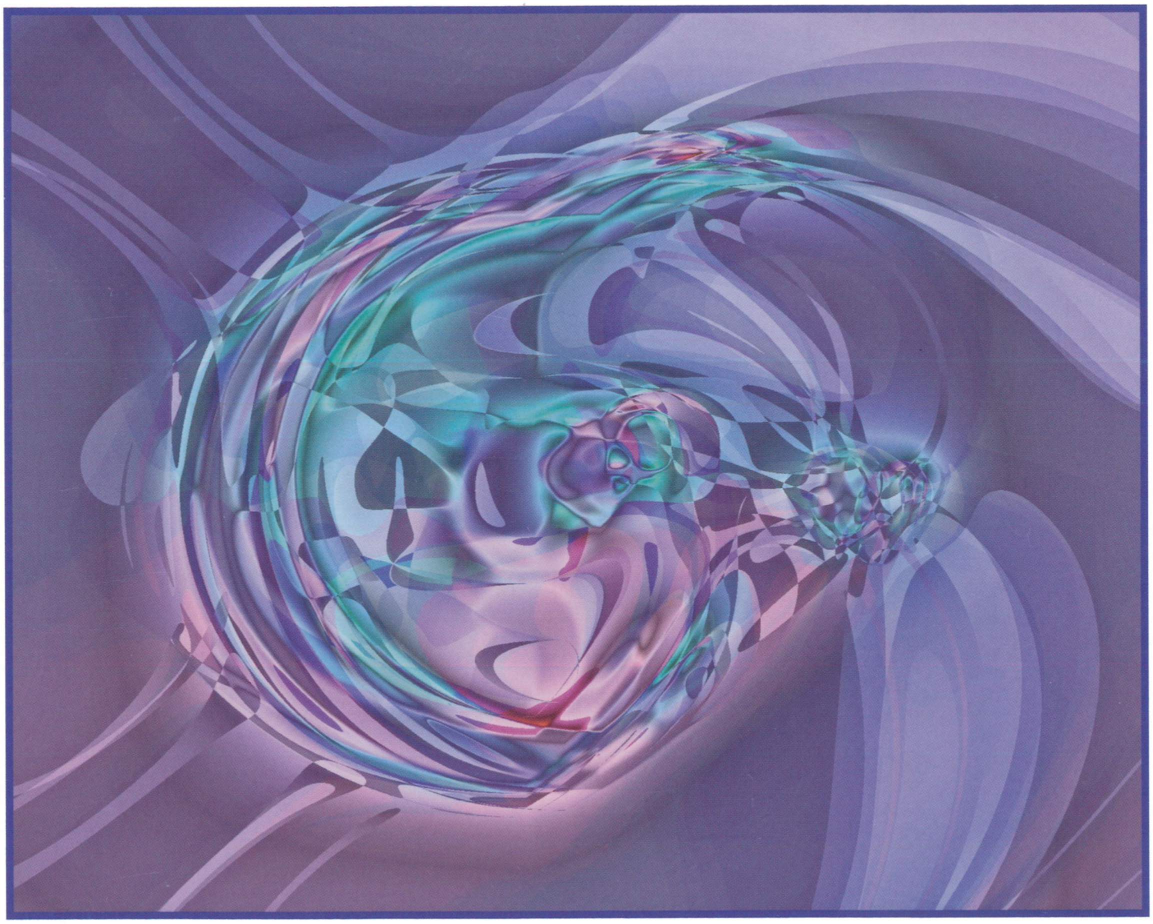
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2013年12月1日発行　第51巻12号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

12
2013

特集 物理学における存在とは



No.606
サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 606 December 2013

物理学における存在とは

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は１年間(本誌のみ) 11,000 円，半年間(本誌のみ) 5,500 円．(税込み価格)

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7～2010 年/12 省略
2011 年/1 数論の探求
/2 物理現象を読み解く数学的手法
/3 方程式と現代代数学
/4 物理学と多様体
/5 初学者を悩ます数理の概念
/6 物理イメージと数式表現
/7 〈隠れた〉物理法則
/8 計算が拓く数学と物理の世界
/9 オイラー
/10 時空と熱力学
/11 線形から非線形へ
/12 物理と仮説
2012 年/1 数学から物理へ，物理から数学へ
/2 古典のススメ[物理編]
/3 量子を操る
/4 量子力学の数学的技法
/5 解析学と物理学
/6 面白い発想[物理編]
/7 数学と物理における格子
/8 導来圏をめぐって
/9 ハイゼンベルク
/10 超弦理論の数理
/11 物理と数学における厳密解
/12〈振動する〉物理
2013 年/1 表現論の世界
/2 《量子化》の発想
/3 光と物理学
/4 解析学における様々な発想
/5 次元の作法
/6 発展する統計力学
/7 群と物理学
/8 エネルギーを通して物理学を知る
/9 ボーア
/10 分類する《数理科学》
/11 理論物理と実験物理の交錯

数理科学臨時別冊一覧

12 年/7 弦の場の理論
12 年/9 超弦理論の応用
12 年/10 複素多様体論講義
12 年/11 幾何学の量子化
12 年/12 量子力学から超対称性へ
13 年/1 行列解析ノート
13 年/4 無限量子系の物理と数理
13 年/7 現代宇宙論講義
13 年/8 クォーク・ハドロン物理学入門
13 年/9 統計力学から理解する 超伝導理論

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店(新宿)
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店(立川)
くまざわ書店八王子店
くまざわ書店桜ヶ丘店(多摩)
書泉グランデ(神田)
三省堂本店(神田)
リブロ池袋店
ジュンク堂池袋本店
芳林堂(高田馬場)
MARUZEN＆ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター(東京駅前)
丸善丸の内本店(東京駅前)
丸善日本橋店
MARUZEN多摩センター店
ジュンク堂吉祥寺店
ブックファースト青葉台店(横浜)
有隣堂イセザキ町本店(横浜)
有隣堂西口・東口(横浜)
有隣堂厚木店(厚木)
ジュンク堂盛岡店
丸善津田沼店
ジュンク堂新潟店
ジュンク堂甲府岡島店
MARUZEN＆ジュンク堂新静岡店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店(大阪)
アバンティブックセンター(京都)
ジュンク堂京都店
ジュンク堂三宮店
ジュンク堂三宮駅前店
ジュンク堂大分店
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN広島店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
丸善博多店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
ジュンク堂旭川店
金港堂(仙台)
金港堂パーク店(仙台)
ジュンク堂仙台本店
ジュンク堂秋田店
ジュンク堂郡山店
鹿島ブックセンター(いわき)
友朋堂(つくば)

――大学生協・売店――
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学
広島大学(北１店)
九州大学(理系)

December 2013 MATHEMATICAL SCIENCES Number 606

物理学での存在とは

佐藤 文隆

1. 根拠づけか？，探険か？

時空，波動関数，真空，電荷，準粒子，確率，無限大が存在するとは？と問われれば，ある枠組みを持ち出してそこに位置付けようとする．「空間があるとは？」と問われれば空間を入れる空間を用意すればよい．「空気があるとは？」と問われれば空気が関わっている無数の実例を列記すればよい．

物理学という閉じた世界で，電荷が存在するとは？と問われれば，電場をかけると電荷があるものが動き出す，とか答えるかもしれない．そして，電場とは？と問われると，電荷が存在することで発生する場である，と答えるが，これは次の，場とは？という疑問を誘発させるだけである．整理してみると，電荷と電場は，一方が他方を根拠づけるというよりは同次元のセットで導入されたものであり，これらセットの存在を実感できるのは運動という，より実感の持てる，よりベーシックな存在で支えられている．存在は必ずしもモノではない，運動のようなコトでもよい．

物理学という学問的営為は実験も含め数理的に事象を扱うことである．対象を数理的に表現可能なものにする営みである．現代の物理学には無数の存在が群がっているが，それらの発祥には時間差があり，ひと時代前の枠組みの中に新存在が登場するドラマを繰り返してきた．枠組みとは電荷と電場の例のようなセットのことである．そしてあるセットを根拠づける，よりベーシックなセットがあるように，セット間には自ずから階梯が存在する．時間空間と運動が最低位とすれば，次に重さ，音，熱，色などがきて，その上位に電荷，時空，量子，真空などがきて，そのまた上位に無限大，確率，エントロピー，波動関数や準粒子などがくる．

上位と言っても必ずしも上位が下位の根拠であるということではない．時間的に後発のセットは必ず前のセットを包括するように作るから理念的には支配関係にあるようだが，考え様によっては上位のものは下位の根拠で支えられており，下位なしには自分で立っていられない危うい存在である．また，科学的探求はこれからも進み，今迄がそうであったように，一見完結したように見えるセット群でも次々と改変されていくであろう．そうなると，最上位はまだ，あるいは永遠に見えてこない．あるというならそれは人間の有限性のことであって自然のことではない．

こう見ていくと存在を根拠づける最終存在に辿り着きそうにない．従って存在とは？に答える枠組みは科学の中にはなく，科学にあるのはテクノロジーの進歩で存在の新側面を次々と露わにしていくことであって，根拠さがしというよりも新世界の探険であるとも言える．

2. 人間が中心に座る

哲学を大きなうねりでみると，まず超越者に基づく存在論に発し，諸科学の発祥と同期して認識論に傾くが，個別諸科学の拡大を経て，再び新たな存在論を追求していると言える．認識論への転換の主役がカントであり，存在論への再転換に挑戦したのはハイデッカーである．何れにせよ，これらの潮流は，物理学から心理学にまで及ぶ個別諸科学の拡大を背景とした精神世界をめぐる言説の変容を動因としたものである．価値観をめぐる課題を個別科学では避ける線引きをして宗教や哲学との平和共存を図る妥協策をつき崩して，精神世界全体を貫通する真理の追求なのである．

哲学や科学とは，もちろん，真理を求める営みであるが，諸々の古代文明の精神世界の中でも，現代の哲学や科学に繋がるものは古代ギリシャに求められる．二十世紀初頭のフランスで活躍した詩人・評論家のポール・ヴァレリーはヨーロッパ精神はローマとキリスト教，それにギリシャを受け継いでいるが，次の引用のように，とりわけ科学はギリシャに根を持つとしている．「ギリシャから我々が受け継いだもの，それこそ，恐らく，我々を最も深く差異化したものであろう．我々は「精神」の規律，あらゆる分野で完璧を追究した並はずれた手本をギリシャから受け継いでいる．あらゆるものを人間に，総体としての人間に関係づける思考方法を我々は受け継いでいる．人間は人間にとって参照体系になる，あらゆるものはその体系に関連づけられる，という考え方である．だから，人間は人間のあらゆる部位を発展させ，明快かつ可能な限り目に見える形の調和裡に保持しなければならないのだ」，「金字塔の構築には最も類稀な才能に加えて通常は共存不能な資質の協力が必要だった．金字塔を構築した人々は勤勉で明敏な職人，深遠な思想家，そして繊細かつ完璧さに対する研ぎ澄まされた感覚を備えた芸術家たちであった」（ヴァレリー）この引用と科学精神の議論は拙著『職業としての科学』（岩波新書）第五章に論じているが，一言でいえば徹底した人間主義，人間の鍛錬主義であり，現実の生を見つめるというよりは理想主義を掲げることである．ギリシャの幾何学こそ完璧をめざす知識の不滅のモデルであるとされる．

3. 実存的存在論

存在論と認識論の議論に戻ると，西洋哲学とその系譜をひく現在の個別諸科学には，自明のこととして一々言及しないが，強烈な人間中心主義がある．これは「日本的精神」として語られる，人間を自然に一体化する，自然に包み込まれる，といった方向とは真逆のものである．もっとも，理念と現実は同じではないが，学問世界の規範的理念とは時代の精神と共鳴して輝いているものである．

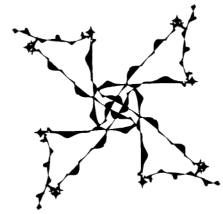
原始的存在論は存在の根拠を超越者に求め，神と人間と自然のコスモスを語った．キリスト教神学は言説の根拠をギリシャ的に論理学に置くことを発達させたが，それによって自己撞着を深め，根拠を経験に求める実証主義・実験主義の個別科学の発祥へと導いた．西洋の産業革命や民主主義も「歴史は人間が作る」という理念であり，個別科学発祥もその一環であった．

古来からの形而上学的存在論に代わって登場した近代の存在論では人間が中心に座った．しかしその認識主体の人間と自然の関係について，傍観的認識論と投企する意図を持つ行動人の実存的認識論とに分岐する．

存在論的には数学は言語と同様に実在である．外界の物質世界，間主観的精神世界，それと同等な実在性を有する第三の世界と考えたほうがいい．数学は論理だけを支えに他の世界から切り離されても構成できる存在だというわけではない．二十世紀初頭にあった数学の形式主義と直観主義の論議を想起する必要があろう．そして，量子力学の実存的存在論と数学の存在論の関わりが新たな試金石であるのかもしれない．

（さとう・ふみたか，甲南大学，京都大学名誉教授）

時空
実在か戦略か？



小玉　英雄

時間空間の概念は，人類の長い歴史の中で大きく変遷してきたが，その流れは大まかには「戦略としての時間空間から実体としての時空へ」と要約される．本稿では，相対的時間空間と絶対的時間空間の間で揺れ動きながら，この大きな流れに沿って発展した物理学における時間空間概念の展開を，ガリレオ・ニュートンの時代以降に限って見てみよう．

1. ニュートン理論における時間空間概念

ニュートン（Isaac Newton, 1642–1727）はガリレオ（Galileo Galilei, 1564–1642）の功績を足場として，近代物理学の基礎を築いたが，2 人の時間・空間に対する捉え方はかなり異なっているように思われる．

物理学におけるガリレオの最大の貢献は，慣性の法則の発見であるが，ニュートンによる運動法則の定式化（ニュートン力学）は，この慣性の法則を第 1 法則として取り入れており，すべての定式化の基礎としている．

ニュートンの運動の 3 法則

第 1 法則（慣性の法則）　質点は，力を受けない限り，速度を保つ．

第 2 法則（運動方程式）　質点の加速度 $\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{v}/dt$ は，質点に作用する力 $\boldsymbol{F}$ に比例し，その質量 m に反比例する．比例係数は 1 とすることができ，$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$.

第 3 法則（作用反作用の法則）　2 つの質点の間に力が働くとき，質点 1 に働く力 $\boldsymbol{F}_1$ と質点 2 に働く力 $\boldsymbol{F}_2$ の間には，$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$ の関係が成り立つ．

この 3 法則のうち，第 1 法則は第 2 法則で $\boldsymbol{F} = 0$ とおけば得られるので，一見不要に見えるがそうではない．皆さん，電車に乗ると，電車が減速・加速をするたびに体が前後に加速されることを経験すると思う．力の定義である第 2 法則によれば，これは，電車を基準にした空間で電車の減速・加速の際に乗客に力が働くことを意味する．しかし，この力は物体間の力に帰着できない．第 3 法則が示唆するように，ニュートン力学では力は質点間の 2 体力に還元できるものに限られており，それ以外の力は理論の対象外となる．第 1 法則はこの対象外の力を排除する役割を果たす．すなわち，すべての相対空間で運動法則が成り立つのではなく，第 1 法則が成り立つ慣性系と呼ばれる特別の基準系に相対的な空間が存在すること，そして，この特別な相対空間において第 2 法則により力を定義すれば，力が 2 体力に帰着される．

それでは，この特別の基準系とはいったいどのようなものであろうか？ また，唯一なのか？ 実証科学の祖であるガリレオは，実験をすべての基礎におき，鋭い洞察力を持っていたが，必ずしもこのような問題に関心があったとは思えない．

これに対し，ニュートンは上に述べた慣性の法則の意義を深く理解していたと思われる．その結果として彼の与えた解答は，**絶対空間・絶対時間**である．その中のどのような物体の影響も受けない，「不動の一様等方な空間」と「絶対的時の流れ」いうものがあると考えたのである．神学の影響もあったと思われるが，彼の力学およびそれに基づく重力理論がケプラー（Johannes Kepler, 1571–1630）による天体の運行法則に基づいていたことも大きいと想像される．コペルニクス（Nicolus Copernicus, 1473–1543）は，プトレマイオス（Κλαύδιοσ Πτολεμαῖοσ, 83 頃–168 頃）の『アルマゲスト』（天文学大全）*1) に集約された地球中心の宇宙観（天動説）から太陽中心の宇宙観（地動説）への転換をもたらした思想家として有名であるが，ニュートンの理論はそれを遙かに超えていた．なぜなら，有限な質量を持つ限り，太陽も惑星からの力の反作用により，加速運動することになるためである．このような状況で，「慣性系」という理想化された系が天体や星々と独立に絶対的なものとしてその背後にあると想定する気持ちはよくわかる．

しかし，この絶対空間・絶対時間という概念は，ニュートンが自ら定式化した法則により無意味化されることになる．すでに述べたように，ニュートン理論では，力は2体力に帰着されるので，一般に質点 i に対する運動方程式は，並進不変性（空間の一様性）より，次のように表される：

$$m_i \boldsymbol{a}_i = \sum_j \boldsymbol{F}_{ij}(\boldsymbol{r}_{ij}), \quad \boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j. \tag{1}$$

この方程式は，時間の原点の変更，空間並進，空間回転に加えて次の**特殊ガリレイ変換**

$$t' = t, \quad \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - t\boldsymbol{v}_0,$$
$$\boldsymbol{F}'_{ij}(\Delta \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{F}_{ij}(\Delta \boldsymbol{r}) \tag{2}$$

に対して不変となる（$\boldsymbol{v}_0$ は定数ベクトル）．実際，加速度 $\boldsymbol{a}_i = d^2\boldsymbol{r}_i/dt^2$ と相対位置ベクトル $\boldsymbol{r}_{ij}$ はこの変換で不変で，また，2粒子の衝突による速度変化 $\Delta \boldsymbol{v}_i$ がこの変換で不変なので，第3法則から導かれる全運動量保存則 $m_i \Delta \boldsymbol{v}_i + m_j \Delta \boldsymbol{v}_j = 0$ より，粒子間の質量比も変換で不変となる．第2法則を力の定義とみる立場からは，この変換で力の法則が不変となる．一般に，時間推進・反転，空間並進・回転・反転，特殊ガリレイ変換の任意の組合せを**（一般）ガリレイ変換**という．

この結果は，ガリレイ変換で結ばれる基準系あるいはそれに相対的な時間空間では，全く同じ物理法則が成り立ち，実証科学の観点からは対等であることを意味する（**ガリレオの相対性原理**）．上記のガリレイ変換は，元の基準系に対して速度 $\boldsymbol{v}_0$ で等速直線運動する基準系への変換となっており，$\boldsymbol{v}_0$ は任意なので，結局，無限個の慣性系が存在することになる．ニュートンの想定した絶対空間をその中で実験により特定することは不可能となる．

このように，対等な空間が無限個あるという奇妙な事態になってしまったが，時間空間が自然現象およびその法則を数理的に表現するための手段，あるいは戦略であるという観点からは，これは重大な問題ではない．まず，ガリレオの相対性原理は，慣性系での法則がガリレイ変換に対して不変であることを意味している．すなわち，ガリレイ不変性は慣性系における法則の形を強く制限する．実は，この不変性をたよりに原理的には慣性系を探すことが可能となる．もちろん，真の慣性系を見つけることは非常に困難であるが，実用的には必要な精度でニュートンの法則が成り立つ近似的な慣性系を見つけることができる*2)．

2. 特殊相対性理論における時空概念

このような純粋に戦略としての時間空間の概念に大きな変更を迫ったのが，場の概念の登場，特に電磁気学の発達である．19世紀に入り，ファラ

*1) 『アルマゲスト』は，単に天動説という学説についての書ではなく，古代からプトレマイオスの時代までに人々が目視によって得た天体の運行に関する経験的知識を整理総大成した偉大な実用の書であり，この書の登場によりそれ以前の関連する文献はほとんど破棄されたと言われている．

*2) ニュートン理論は，相対性理論と異なり，重力を特別扱いしていない．このため，例えば自由落下するエレベータは局所的にも慣性系でない．ニュートン理論での慣性系は，現代の観点からは，本質的に近似的概念である．

デー（Michael Faraday, 1791–1867），マクスウェル（James Clerk Maxwell, 1831–1879），ヘルツ（Heinrich Rudolf Hertz, 1857–1894）らの努力により，それまで独立と思われていた静電気，磁気，光学など様々な電磁気現象・法則が電磁場の概念により統一された．これにより，ニュートンが前提とした質点間の力という枠組みに収まらない力が登場し，ニュートン力学に基づいてすべての自然法則を統一的に記述するという力学的自然観が危機に直面した．このような状況で，当時のほとんどの物理学者がエーテル（ether*3)）という新たな実体を導入することにより，力学的自然観を救おうとした．音波を空気などの媒質の振動として記述するのと同様に，電磁波をエーテルという新たな実体の振動として力学的に記述しようと試みたのである．

エーテルは，一見何もない真空に特別の基準系が存在することを意味し，絶対空間が実体として再登場したことになる．当然，ニュートン力学の持っていたガリレイ不変性は，破れることになる．実際，真空中のマクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0, \quad \frac{1}{c^2}\partial_t \boldsymbol{E} = \nabla \times \boldsymbol{B},$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \quad \partial_t \boldsymbol{B} = -\nabla \times \boldsymbol{E} \tag{3}$$

より，波動方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{E} - c^2 \triangle \boldsymbol{E} = 0 \tag{4}$$

が導かれるが，これは電磁波が真空中を光速 c で伝わることを示している．この伝播速度はガリレイ変換で不変でない．例えば，平面波 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}\exp[-i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]$ （$\boldsymbol{k} = \omega\boldsymbol{n}/c$, $\boldsymbol{n}$ は伝搬方向の単位ベクトル）を考えると，ガリレイ変換で力と電荷，したがって電場は不変でないといけないので，慣性系 $(t', \boldsymbol{r}')$ では

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{e}\exp\left[-i(\omega' t' - \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}')\right];$$
$$\omega' = \omega - \boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k} \tag{5}$$

となる．これより，波の群速度 $\boldsymbol{v} = \nabla_{\boldsymbol{k}}\omega$ は

$$\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{n} \to \boldsymbol{v}' = c\boldsymbol{n} - \boldsymbol{v}_0 \tag{6}$$

と変換する．この変換則は質点の速度の単純加法則と一致し，電磁波の伝播速度を測ることにより，基準系のエーテルに対する運動を検知できることを示している．

この考え方に基づき，物体（媒質）や地球のエーテルに対する運動を検知しようとする様々な実験が行われたが，それらは，ことごとく，静止エーテル理論の予言と合わないものであった．この結果を受けて，物体の近傍ではエーテルが部分的に引きずられる，電磁波の振動数ごとにエーテルが存在するなど，様々なエーテル理論の修正が積み重ねられ，次第にエーテルは絶対的な基準系としての地位を失っていった．このエーテル理論の失敗を決定的としたのが，よく知られているマイケルソン（Albert A. Michelson, 1853–1931）・モーリー（Edward W. Morley, 1838–1923）の干渉実験である．この実験は，地球のエーテルに対する運動速度 v を真空中の光速 c との比について 2 次の精度で測ろうとしたものであるが，結果は，地球に対する真空中の光速は地球の運動の影響を受けないというものであった．

このようにエーテル理論が破綻する中，時間空間を純戦略的な観点から再構築したのがアインシュタイン（Albert Einstein, 1879–1955）である．彼は，慣性系という法則記述の上で特別の役割をする基準系があり，それらがすべて対等であるという相対性原理の考え方は踏襲しつつ，慣性系に付随する時間空間座標の変換則を実験事実のみに基づく操作的方法で決定することを提案した．具体的には，エーテル理論を破綻させた実験事実である**光速不変性**を基礎に据え，標準時計と光による時間情報の交換のみで慣性系に付随する標準的な時間空間座標系を操作的に定義したのである（**特殊相対性理論**）．その結果，2 つの慣性座標系の間の変換は，2 点の時間差を Δt，位置ベクトルの差を $\Delta\boldsymbol{r}$ として，光波面の方程式

$$\Delta s^2 := -c^2\Delta t^2 + \Delta\boldsymbol{r}^2 = 0 \tag{7}$$

を不変とする変換となり，正則なものは，時間推進，時間反転，空間推進，空間回転，空間反転，特

*3) ギリシャ語で天空上層の空気という意味．

殊ローレンツ（Lorentz）変換

$$ct' = \gamma_0(ct - \boldsymbol{\beta}_0 \cdot \boldsymbol{r}), \tag{8a}$$

$$\boldsymbol{r}' = \gamma_0(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\beta_0} ct) \tag{8b}$$

および時間空間座標をすべて定数倍する変換（相似変換）の組合せで与えられる*4)（$\boldsymbol{\beta}_0 = \boldsymbol{v}_0/c$, $\gamma_0 = (1-\beta_0^2)^{1/2}$）．これらのうち，相似変換を除く変換は，**ポアンカレ(Poincaré)変換**または**一般ローレンツ変換**と呼ばれる．ニュートン理論のガリレイ不変性と同じ理由で，特殊相対性理論では，慣性系での物理法則はポアンカレ変換で不変でなければならない．相似変換は粒子の質量も変化させるので，理論の不変群からは通常，除外される．

特殊ローレンツ変換の最大の特徴は，時間座標が空間座標に依存した変換を受け，変換により時間座標と空間座標が混ざり合うことである．これは，時間と空間が不可分の関係にあることを意味し，時間と空間が一体となった4次元時空という概念を生み出した．この時空概念の中で中心的な役割を果たすのが，ミンコフスキー（Minkowski）計量と呼ばれる時空計量である．この計量は，無限小形式で

$$ds^2 = -c^2dt^2 + d\boldsymbol{r}^2 \tag{9}$$

と表されるが，粒子の時空軌道の接ベクトルに対しては，粒子と共に運動する標準時計の進み（＝固有時）τ により $ds^2 = -c^2d\tau^2$ と表される．したがって，原理的には，計量は基準系やその座標系と独立に決定可能である．さらに，慣性座標系をこの計量が(9)の形に表される座標形として選別することができる．

この時空計量に着目すると，全く対等な無限個の慣性系とそれに付随する相対的時間空間から一つの抽象的な時空を構成することができる．方法は簡単で，互いにポアンカレ変換で結ばれる異なる慣性座標系の2点を同一視するのである．この同一視により一つの慣性座標系で記述される時間空間 $\mathbb{R}^4$ と同型な抽象的時空 $\mathscr{M}^4$ が定義される．さらに，計量 ds^2 はポアンカレ変換で不変なので，この抽象的な時空に計量を定義する．この特殊な計量をもつ抽象時空多様体が**ミンコフスキー時空**である（図1）．ミンコフスキー時空と慣性座標系の関係は，公理的に定義されたユークリッド（Euclid）空間とその直交座標系の関係と同じである．

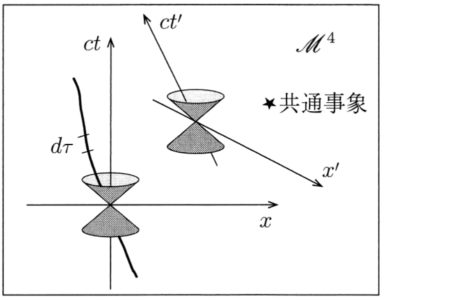


図1　ミンコフスキー時空.

物理的観点からは，抽象時空多様体を時間的空間的に局在した事象の集合体と同一視することがしばしばあるが，量子論では同じ事象をすべての観測者が同時に観測することは原理的な意味でできないので，この同一視は厳密には正しくない．

このように，特殊相対性理論では，無限個の同等な相対的時間空間をミンコフスキー時空という一つの抽象的時空で置き換えることができるが，それはあくまで自然現象を記述する手段に過ぎず，決してエーテルのような実在ではない．粒子や場の入れ物に過ぎず，内容物の影響を全く受けないからである．

3. 一般相対性理論における時空概念

ニュートン理論では，重力も慣性系において記述されるが，これは問題を引き起こす．なぜなら，「物体に働く重力加速度はその質量に依存しない」という**等価原理**が実験によって確立されているためである．この等価原理を仮定すると，「力が働かない質点は速度を変えない」という慣性系の定義は，重力場中では意味を失う．

そこで，アインシュタインは，慣性系の定義を「重力以外の力を受けない粒子が等速直線運動する基準系」と変更した．これは，重力が慣性系では

*4)　局所的には定義されるが，大域的には特異性を持つ変換を許すと，共形変換と呼ばれるより広いクラスの変換で光波面の方程式は不変となる[1]．

消えることを意味する．もちろん，地球の重力場を考えればわかるように，源をもつ重力場で自由落下する粒子の集団は互いに等速直線運動しない．したがって，この新たな定義では慣性系は微局所的*5)にしか存在が保証されない．

この事実よりいくつかの重大な帰結が導かれる．まず，ニュートン理論や特殊相対性理論と異なり，全事象を記述できる特別の基準系は存在しない．したがって，自然現象やその法則の記述には一般的な基準系を用いることが要求され，しかも法則の記述においてどの基準系も同等であるとするのが自然である（**一般相対性原理**）．一方で，各時空点Pの（無限小）近傍では重力の働かない**微局所慣性系**が存在し，そこでは，特殊相対性理論が成り立つ（**等価原理**）．そこで，一般的な基準系での法則の表現を得るには，一般的な基準系と微局所慣性系との関係を与え，それを用いて微局所慣性系での記述を一般的な基準系での記述に翻訳する必要がある．

この関係を与える一つの方法は，微局所慣性座標系 X^a_{P} $(a = 0,\cdots,3)$ と一般座標系 x^μ $(\mu = 0,\cdots,3)$ の間の座標変換則 $x^\mu = x^\mu(X_{\mathrm{P}})$ を具体的に与えることである．この関係式を用いると，例えば，重力以外の力が働かない粒子の運動方程式

$$\frac{d^2X^a_{\mathrm{P}}}{d\tau^2} = 0 \tag{10}$$

は，一般座標系での運動方程式

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0, \tag{11}$$

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(\mathrm{P}) = -\frac{\partial X^a_{\mathrm{P}}}{\partial x^\nu}\frac{\partial X^b_{\mathrm{P}}}{\partial x^\lambda}\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial X^a_{\mathrm{P}}\partial X^b_{\mathrm{P}}} \tag{12}$$

に書き換えられる*6)．したがって，一般座標系では重力が現れ，その大きさや方向は**接続係数**と呼ばれる64個の成分を持つ量 $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ で記述される．

ここで接続係数という名前が用いられるのは次の理由による．まず，時空の各点では微局所慣性系が存在するが，当然それは無限個あり，互いにポアンカレ変換で移り合う．したがって，特殊相対性理論と同様に，各点で微局所的なミンコフスキー時空を構成することができる．時空を一般座標系を局所座標系としてもつ多様体とみなすとき，微局所ミンコフスキー時空はその接空間に当たる．このとき，(10)は粒子の4元速度ベクトル $U^a = dX^a/d\tau$ が運動と共に平行移動することを表している．しかし，微局所慣性系は無限小の広がりしか持たないので，点Pを通過した粒子はすぐに隣の点Qに移ってしまう．このため，この平行移動を記述するには，点Pでの速度ベクトルが属する微局所ミンコフスキー時空 $\mathscr{M}_{\mathrm{P}}$ と点Qでの微局所ミンコフスキー時空 $\mathscr{M}_{\mathrm{Q}}$ が平行移動によりどのように対応するかを指定することが必要となる．この対応は，点Pの座標を x^μ，点Qの座標を $x^\mu + dx^\mu$，U^a の一般座標成分を $u^\mu = U^a\partial x^\mu/\partial X^a$ として，一般に64個の成分を持つ量 $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ を用いて次のように表される（図2）：

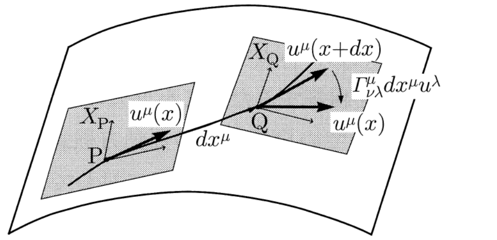


図2　4元速度ベクトル u^μ の平行移動と接続係数．

$$u^\mu(x+dx) - u^\mu(x) = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda}dx^\nu u^\lambda. \tag{13}$$

これを $d\tau$ で割って，$d\tau \to 0$ の極限を取れば，(11)が得られる．したがって，$\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ は，局所ミンコフスキー時空の平行移動による局所慣性系の「接続」の仕方を記述している．

表式(12)より，一般座標変換 $x^\mu \to x'^\mu = x'^\mu(x)$ に対して，接続係数は

$$\Gamma'^\mu_{\nu\lambda} = \Lambda^\mu{}_\alpha(\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu(\Lambda^{-1})^\gamma{}_\lambda\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\nu(\Lambda^{-1})^\beta{}_\lambda\partial_\alpha\Lambda^\mu{}_\beta \tag{14}$$

と変換することがわかる．ただし，$\Lambda^\mu{}_\alpha =$

---

*5) 有限な広がりをもつ場合と区別するために，本稿では，無限小の広がりをもつ場合には，**微局所**という言葉を使うことにする．

*6) 同じ項内で2度現れる添え字については0から3の範囲で和を取るものとする（アインシュタインの規約）．

$\partial x'^{\mu}/\partial x^{\alpha}$．したがって，接続係数はテンソルではない．これは，各点で $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}=0$ となる微局所慣性系の存在を保証するために不可欠の要素である．

一般座標系での自由粒子の運動方程式 (11) は，導出法より，一般座標系の変換に対してテンソル方程式として振る舞い，形を変えないが，逆に，一般相対性原理に対応して，運動方程式が一般座標の変換に対して形を変えないという**一般共変性**を要請すると，接続係数の変換則 (14) が得られる．したがって，重力場の一般共変的な記述を与えることと，変換則 (14) で結びつく接続係数をすべての一般座標系で与えることとは同等となる．ただし，(12) で与えられる接続は重要な特殊性をもつ．それは，下付の添え字について対称となっている：

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}=\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}. \tag{15}$$

接続係数がこの性質をもつ場合には，各点 P の近傍で適当な局所座標系をとると，点 P での接続係数がすべてゼロとできることが容易に示される．したがって，等価原理を満たすためには，この条件を課す必要がある．

一般座標系を用いて微局所慣性系の配置を記述するもう一つの方法として，時空計量を用いるよりシンプルなアプローチがある．その出発点は，各微局所ミンコフスキー時空のミンコフスキー計量 $\eta=(\eta_{ab})$ である．微局所ミンコフスキー時空を，時空多様体の接空間と見なすと，このミンコフスキー計量は接ベクトルの長さや角度を与え，時空の計量を定義する：

$$\begin{aligned} &ds^2=g_{\mu\nu}(x)dx^{\mu}dx^{\nu};\\ &g_{\mu\nu}(x(\mathrm{P}))=\eta_{ab}\partial_{\mu}X^a_{\mathrm{P}}\partial_{\nu}X^b_{\mathrm{P}}. \end{aligned} \tag{16}$$

この時空計量が大域的に至るところミンコフスキー計量 η と一致するような大域的慣性座標系が存在するなら，この時空には本質的な重力場は存在せず，特殊相対性理論の世界となる．一方，そのような大域的座標系が存在しないなら，本質的重力場が存在する．

この時空計量による記述と接続による記述の関係は次のようになる．まず，上で導入した接ミンコフスキー時空（=微局所ミンコフスキー時空）の接続は，通常のミンコフスキー時空での平行移動に対応するので，対応する平行移動はベクトルの長さを保つ．そこで，(13) 式の平行移動でベクトルの長さの 2 乗 $g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu}$ が保存される条件を求めると，

$$\nabla_{\lambda}g_{\mu\nu}:=\partial_{\lambda}g_{\mu\nu}-2\Gamma^{\alpha}_{\lambda(\mu}g_{\nu)\alpha}=0 \tag{17}$$

を得る．ところが，この関係式と条件 (15) を組み合わせると，接続係数が計量のみで次の形に決まってしまう（リーマン（Riemann）接続）：

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}=\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}\left(\partial_{\nu}g_{\alpha\lambda}+\partial_{\lambda}g_{\alpha\nu}-\partial_{\alpha}g_{\nu\lambda}\right). \tag{18}$$

したがって，接続係数がニュートン理論の重力加速度にあたるので，時空計量はそのポテンシャルに対応する．時空計量を用いると，点 P での微局所慣性座標系は $g_{\mu\nu}(\mathrm{P})=\eta_{\mu\nu}$, $\partial_{\lambda}g_{\mu\nu}(\mathrm{P})=0$ となる局所座標系として特徴付けられる．

このように，一般相対性原理と等価原理を満たし，さらに重力場が時空計量のみで記述される理論を**一般相対性理論**という．一般相対性理論では，それまでの理論と異なり，時空は計量により記述される非自明な構造をもち，しかもその構造は可変となる．その理由は，重力場の方程式の構造に起因する．一般相対性理論では，計量の振舞いは次のアインシュタイン方程式により決定される：

$$R_{\mu\nu}-\tfrac{1}{2}Rg_{\mu\nu}=\kappa^2T_{\mu\nu} \tag{19}$$

ここで，$\kappa^2=8\pi G/c^4$, $T_{\mu\nu}$ は物質のエネルギー運動量テンソル，$R_{\mu\nu}$ と R はリッチ (Ricci) 曲率テンソルとスカラ曲率で，リーマン曲率テンソル

$$R^{\mu}{}_{\nu\lambda\sigma}=2\partial_{[\lambda}\Gamma^{\mu}_{\sigma]\nu}+2\Gamma^{\mu}_{[\lambda|\alpha|}\Gamma^{\alpha}_{\sigma]\nu} \tag{20}$$

の縮約により，$R_{\mu\nu}=R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}$, $R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ で定義される．この曲率テンソルは，ミンコフスキー時空に対してはゼロであるが，逆に，ある単連結領域でゼロなら，その領域で $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$ となる局所座標系が存在する[2)]．すなわち，時空の非自明性（=非平坦性）を判定する完全な指標となる．したがって，アインシュタイン方程式は，物質のエネルギーが時空構造のひずみを生み出すこと，すな

わち物質が時空に作用することを意味する．

さらに，この時空構造のひずみは独自の力学的自由度をもつ．これを見るため，時空計量 $g_{\mu\nu}$ がミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ からわずかにずれているとして，そのずれを $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ とおく．このとき，アインシュタイン方程式を $h_{\mu\nu}$ について展開して，1次の項を取り出すと，$\psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - h^{\alpha}_{\alpha}\eta_{\mu\nu}/2$ に対して，次の線形摂動方程式を得る[2)]：

$$\left[-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \triangle\right]\psi_{\mu\nu} = -2\kappa^2 T_{\mu\nu}. \qquad (21)$$

ただし，一般相対性理論では一般共変性のため，摂動方程式は座標変換と同じ4自由度のゲージ自由度をもつ．このゲージ自由度を制限するため，ここではゲージ条件 $\partial^{\nu}\psi_{\mu\nu} = 0$ を課している．

この方程式は電磁波の方程式と同様の波動方程式であり，時空構造のひずみ $h_{\mu\nu}$ が光速で伝搬することを示している（**重力波**）．すなわち，等価原理を満たし一般共変性を持つ理論では，時空はもはや物質を入れるための単なる容器ではなく，動的な実体となるのである．残念ながら，重力波の直接検出にはいまだ成功していないが，連星パルサーの周期変化は一般相対性理論の予言と高い精度で一致しており，重力波の間接的存在証明となっている．また，ビッグバン宇宙論，さらにはインフレーション宇宙論の成功は，時空構造が動的に変化することの明確な証明と言える．

4. 量子論における時空

一般相対性理論やその様々な共変的拡張は，古典的には完全に整合的な重力理論である．しかし，それらの量子論を作ろうとすると，深刻な問題が発生する．まず，時空計量が力学変数となると，粒子の位置にあたる計量と速度にあたるその微分係数の一部が非可換となり，同時に値が確定しなくなる．これは，微局所慣性系が操作的には確定できないことを意味する．

この問題に対する一つのアプローチは，摂動論である．すなわち，量子時空をある古典的な背景時空からの小さなゆらぎとして捉え，そのゆらぎの量子論を作る方法である．このアプローチでは，背景時空は実体ではなく，自然記述の戦略となる．ただし，一般相対性理論は摂動的量子化では繰り込み可能でない．すなわち，量子補正の発散を吸収するには無限個の結合係数を持つ理論に拡張することが必要となる．これは，理論が有限回の実験では確定できず，予言可能性を持たないことを意味する[*7)]．

この困難は，一般相対性理論の非摂動論的量子化により解決される可能性は残されている．例えば，アシュテカ（Abhay Ashtekar, 1949–）らはこの立場からループ量子重力理論の研究を推進している[3)]．しかし，ゴールからほど遠い状況にある．原因は，古典的な時空描像との対応付けができないことにある．

整合的な重力の量子論を作るもう一つの道として，一般相対性理論とは全く異なった枠組みから出発するアプローチがある．超弦理論はその代表例である[4)]．ただし，現時点では，超弦理論は固定された背景時空でのひもの量子論となっており，ひもの運動により重力波を記述することができるが，ひもの状態が時空構造に直接影響を与えることはない．この理論では，整合的なひもの量子論が可能かどうかで，許される背景時空が制限されるのみである．その意味で，時空は完全に戦略的な手段に過ぎない．

量子重力の世界では，時空は再び戦略的存在に戻ってしまうのであろうか？ 究極理論としての整合的量子重力理論を構築するには，この問いにまず答えなければならないであろう．

*7) ホジャバ（Petr Hořava）理論など絶対空間を復活させ一般共変性を破ることにより，摂動論的に繰り込み可能な量子重力理論を作る試みもある．

参考文献

1) 小玉英雄：「群と相対性理論」数理科学 2013年7月号.
2) 小玉英雄：『相対性理論』（培風館，1997）.
3) Ashtekar, A.: *Lect. Notes Phys.* **863**, 31–56 (2013).
4) Polchinski, J.: *String Theory* (Cambridge Univ. Press, 1998).

（こだま・ひでお，高エネルギー加速器研究機構）

波動関数は実在するか

物質的存在ではない．二つの世界をつなぐ窓口である

谷村　省吾



1. 存在を問う

人は，幼い頃から，また太古の昔から，この世界に何があるのか問い続けているようだ．世界は目に見え手に触れるものがすべてではなく，背後に何か本性のようなものが潜んでいるらしい．人は原因や正体がわからない出来事に不安を感じ，正体をつきとめたいと願う．

人は道具を使い，観察を重ねることによって，ものごとの正体に肉薄する．「すべての物質は原子でできている」,「原子の運動が熱や圧力の正体であり，原子の組み換えが燃焼などの化学変化の正体である」といった世界理解の体系は自然科学と呼ばれている．自然科学は，世界を秩序立てて理解するための描像であり，世界にどう働きかければどういう反応が返ってくるか予測する手段であり，世界に介入するための方針でもある．人間に感覚神経（外界で起きたことを脳に伝える神経）と運動神経（脳から筋肉に運動の指令を伝える神経）があるように，科学は，自然界を写し取る目耳（めみみ）のような役割と，自然界に働きかける手足のような役割を果たしている．

とりわけ物理学は，誰でもいつでもそっくり同じように再現可能な自然現象に関する秩序・法則性を追究する科学である．主として非人為的・非生物的な現象を対象とし（人は恣意的に行動できるので，人自体の自然な法則性を調べにくい，生物は複雑であり個性が強いので，同じ条件での実験がしにくい），正確さを担保するために定量的・数学的方法を多用し，種々の機械を用いて実験検証するのが物理学の特徴だ．

物理学は比較的単純な現象を扱うが，それでも，いろいろなレベルの「存在」を扱っている．例えば，石や水のような「いかにもそこにある存在」を扱うし，電磁場やニュートリノのように「目には見えないが，そういうものがあると想定すると現象をうまく説明・予測できるもの」も扱う．また，エネルギーや質量や電荷のように，自立的に存在していると言うよりは，物体に備わっている物理量もある．しかし，物理量は物質に付随した添え物なのかと言うと，突き詰めると，例えば「電子はこれこれの質量と電荷とスピンを持つ粒子だ」としか言いようがなく，物理量が存在物そのものを規定しているとも言える．また，ポテンシャルやエントロピーのように，直接測定はできないが，諸々の物理量の関係を見通し良く整理するために導入され，他の物理量よりも基本的と見なされる物理量もある．このように物理学における存在概念は奥行きがあり，「存在」の一言では一括しにくい．

数ある「物理的存在」の中でも，とりわけ間接的で奥ゆかしく，実在性が疑問視され議論の的になりやすいのが，今回とりあげる「波動関数」である．

2. 波動関数の歴史と解釈

波動関数について簡単におさらいしておこう．電子や原子などミクロの世界の物理法則は量子力学という理論にまとめられる．標準的な量子力学の枠組みでは，一つの物理系（一つの粒子とは限らない．複数の粒子のセットでもよい）に一つの Hilbert 空間を対応させ，その系の各状態に Hilbert 空間の元を一つずつ対応させる．この元が**状態ベクトル**（state vector）とか**波動関数**（wave function）と呼ばれる．また，その系が持つ物理量（エネルギーや運動量など）の一つ一つに Hilbert 空間上の自己共役演算子を一つずつ対応させる．

量子力学の建設期の歴史を概観しよう[1]．波動関数という概念を最初に導入したのは Schrödinger だ．彼は，de Broglie が提唱した物質波という概念に明確な数学的形式を与えた．3 次元空間内を動く電子の状態は波動関数 $\psi(x, y, z, t)$ で表される．これは 4 つの実数変数 x, y, z, t の関数であり，ψ の値は複素数である．この関数は Schrödinger の波動方程式に入っており，この方程式を解くと水素原子のエネルギー準位などが求まる．そのような計算の媒介物として波動関数は使

われるが，波動関数それ自体の物理的意味は明らかではなかった．ただ，波動関数の絶対値の 2 乗は流体の質量保存則のような方程式を満たすので，Schrödinger は，電子は流体のようなもので，波動関数の絶対値 2 乗は電荷分布の濃淡の密度を表すと解釈した．

Schrödinger に前後して，Heisenberg, Born, Jordan そして Dirac は，行列力学と呼ばれる量子力学の別形式を創り出していた．その理論は物理量を行列として扱い，非可換代数の表現から原子のエネルギー準位を決める．さらに「演算子が作用する波動関数」と「行列が作用するベクトル」を対応させて Schrödinger の波動力学と Heisenberg たちの行列力学が統一的に理解できることを，Schrödinger や Dirac が示した．そうすると波動関数という概念は状態ベクトルという概念に包摂されるが，では，この状態ベクトルは物理的には何を表しているのか？という謎はかえって深まった．

波動関数に対するうまい解釈を与えたのは Born であった．状態ベクトル ψ が規格直交関数系 ϕ_n で

$$\psi = \sum_n c_n \phi_n \qquad (1)$$

のように展開されるなら，この粒子が状態 ϕ_n に見出される確率は，展開係数（複素数）c_n の絶対値 2 乗 $|c_n|^2$ に比例するだろうと Born は考えた．そして，アルファ粒子の散乱のような実験に照らし合わせれば，この解釈の可否を試せると考え，散乱波の近似計算の方法を示した[2,3]．

正電荷を持ったアルファ粒子が直進して，正電荷を持った他の原子核に近づけば，電気的力を受けて進行方向を曲げられる．このアルファ粒子がいろいろな角度にはじき出される確率を計算するのが Coulomb 散乱の問題である．その 1 次 Born 近似は Wentzel が計算した．結果は，それより以前に Rutherford が古典力学を使って計算していた結果と一致した．こうして確率解釈はうまくいきそうだという感触を得た．

アルファ粒子は，途切れなく連続的に流れる流体ではなく，ぽつりぽつりと一粒ずつやって来る粒子である．Schrödinger の流体解釈が不適切なのは明白である．波動関数の絶対値 2 乗は「流体の密度」ではなく「粒子の存在確率密度」を表しているというのが Born の解釈の巧妙な点だ．

なお，Coulomb 散乱の確率分布は，i) 古典力学の厳密計算，ii) 量子力学の 1 次 Born 近似，iii) 量子力学の厳密計算の 3 通りの計算結果が一致することが後にわかった．これは幸運な一致だった[4]．

一般的な物理量に Born の解釈を適用するには，物理量 A を表す演算子 $\hat{A}$ のスペクトル分解

$$\hat{A} = \sum_n a_n \hat{\Pi}_n \qquad (2)$$

を用いる．ここで $\hat{\Pi}_n$ は射影演算子である．状態ベクトル ψ において A を測ったときに測定値 a_n を得る確率は $p_n = \langle\psi|\hat{\Pi}_n|\psi\rangle$ で与えられ，測定値の平均値は $\langle A\rangle = \sum_n a_n p_n = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$ で与えられる．より一般の状態は，von Neumann と Landau が導入した密度行列 $\hat{\varrho}$ で表され，物理量 A を測って測定値 a_n を得る確率は $p_n = \mathrm{Tr}(\hat{\Pi}_n\hat{\varrho})$，$A$ の平均値は $\langle A\rangle = \mathrm{Tr}(\hat{A}\hat{\varrho})$ で与えられる．

Einstein は「神はサイコロを振らない」と言い，確率解釈をよしとしなかったのは有名な逸話である[1]．他方，Born は「光子の発生確率は電磁波の振幅の 2 乗に比例する」という Einstein の洞察にヒントを得て確率解釈を思いついたと公言している[5]．

3. 非可換性と干渉効果

量子論の最大の特徴は物理量の積の非可換性である．つまり物理量 $\hat{A}, \hat{B}$ の積 $\hat{A}\hat{B}$ と $\hat{B}\hat{A}$ は必ずしも等しくない．ちなみに Heisenberg は，自分の計算規則によれば $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$ となることに気づいて，「重大な困難に遭遇した（A significant difficulity arises）」と 1925 年の論文に書いており[6]，1963 年のインタビューでも，「$\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$ になることは気に食わなかった．これさえなければ安心なのにと思っていた」と述懐している[7]．また，量子力学では位置 $\hat{Q}$ と運動量 $\hat{P}$ は非可換であり，

$$\hat{Q}\hat{P} - \hat{P}\hat{Q} = i\hbar \qquad (3)$$

を満たす．この関係式は正準交換関係とか Heisenberg 代数と呼ばれるが，これは 1925 年に Born, Jordan および Dirac の論文に初出した式である[6]．それ以前の Heisenberg の論文にはこんな式 (3) は書かれていない．1933 年の Nobel 賞受賞講演でも Heisenberg は，(3) は Born, Jordan, Dirac が発見したものだと，はっきり述べている[8]．世の中には Heisenberg が正準交換関係を発見したと言う人が数多くいるが[9]，それは不注意な言い伝えである．また，今日「Heisenberg の運動方程式」と呼ばれている式も発明者は Heisenberg ではない[10]．気をつけよう．

非可換性から導かれる重要な性質の一つに干渉効果がある．話を簡単にして

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\alpha} \\ e^{-i\alpha} & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

という行列で表される物理量と

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + \phi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

というベクトルで表される状態を考える．状態 ϕ_1 で物理量 A を測れば値はつねに 1 であり，状態 ϕ_2 での A の測定値はつねに -1 である．また，状態 ϕ_1, ϕ_2 のどちらでも物理量 B を測れば半々の確率で ± 1 の測定値を得て，B の期待値は 0 になる．

次に，状態 ψ で物理量 A を測ると半々の確率で ± 1 の値を得る．その意味で，状態 ψ は状態 ϕ_1 と ϕ_2 を 1 対 1 の割合で混ぜ合わせたようなものだ．しかし，状態 ψ において物理量 B の期待値を求めると $\cos\alpha$ になる．B の期待値が 0 であるような 2 つの状態を混ぜたのに，B の期待値がノンゼロになるのは奇妙だ．ϕ_1, ϕ_2 のどちらの状態でも $B = 1$ が出る確率は 1/2 だったのに，ψ 状態ではその確率が $(1 + \cos\alpha)/2$ になっている．確率が強め合ったり弱め合ったりしているかのようである．このように単純な確率混合が成り立たない現象を**干渉効果**と言う．

遡れば，A と B の非可換性が (4) の行列が同時対角化できないことを意味しており，同時対角化できない行列が干渉効果を誘発している．

逆に，マクロ古典系ではすべての物理量が可換であり，すべての物理量が同時対角化できるので，マクロ系では干渉効果は起きない．

4. 波束の収縮仮説

波動関数の解釈問題の次に来るのが，測定後の波動関数はどうなっているかという問題である．これについては von Neumann が一つの仮説を示した[11]．

物理量を表す演算子 $\hat{A}$ について $\hat{A}\phi_n = a_n\phi_n$（$a_n$ は実数）を満たす ϕ_n を固有ベクトルと言う．状態ベクトルが ϕ_n なら A を測れば 100%確実に測定値 a_n を得る．一般の状態ベクトル ψ に対しては，展開式 (1) の係数 c_n の絶対値 2 乗 $|c_n|^2$ の確率で測定値 a_n を得る．そして，「最初の状態ベクトル ψ が固有ベクトル ϕ_n でなくても，測定値 a_n を得た後の状態ベクトルは ϕ_n になっているだろう」というのが von Neumann の仮説である．

とくに位置の測定にこの仮説を適用すると，もとの波動関数 $\psi(x, y, z, t)$ が雲のように広がった確率分布を表していても，粒子の位置を測定した途端に雲が測定箇所の一点に縮む，というイメージになるところから，これは「波束の収縮」仮説とも呼ばれる．

ただし，一つの固有値 a_n に対して $\hat{A}\phi_n = a_n\phi_n$ を満たす ϕ_n として一次独立なものが複数ある場合（固有値が縮退している場合）は，この仮説を適切に拡張する必要があるが，von Neumann 自身は拡張の仕方を間違えていた．正しい拡張は Lüders（リューダース）が与えた[12]．系の初期状態が密度行列 $\hat{\varrho}$ で表されるなら，スペクトル分解 (2) を持つ物理量 A を測ったときに測定値として a_n を得る確率は $p_n = \mathrm{Tr}(\hat{\Pi}_n\hat{\varrho}) = \mathrm{Tr}(\hat{\Pi}_n\hat{\varrho}\hat{\Pi}_n)$ であり，測定直後の密度行列は

$$\hat{\varrho}_n = \frac{1}{p_n}\hat{\Pi}_n\,\hat{\varrho}\,\hat{\Pi}_n \tag{7}$$

で与えられるというのが von Neumann-Lüders の射影仮説だ．しかしこのように修正された射影仮説も現実には正しくないことが今ではわかっている．このことは後で述べよう．

5. Schrödinger の猫のパラドクス

状態ベクトル・確率解釈・波束の収縮というアイテムがそろうと，Schrödinger の猫のパラドクスを呼び寄せる[13]．その要点は，《外からは内部の見えない箱に毒薬容器と猫が閉じ込められている．生きている猫の状態ベクトルを ϕ_1 とし，死んでいる状態のベクトルを ϕ_2 とすると，量子力学によれば，複素数 c_1, c_2 を係数として重ね合わせたベクトル $\psi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$ が猫の状態になる．このとき猫が生きている確率は $|c_1|^2$，死んでいる確率は $|c_2|^2$ である．箱を開けて猫の生死を観測した途端に猫の状態は ϕ_1 か ϕ_2 に波束の収縮を起こす．これは変ではないか!?》というストーリーである．これはさほど出来のよいパラドクスとは思えないが，パラドキシカルな点を列挙して分析しよう．

第 1 に，直観的には「猫は生きているか死んでいるかのどちらかであり，それらの中間の状態は考えられない」が，論理的には「生と死の重ね合わせ状態がある」という点がパラドキシカルだ．しかし，外部の観測者にとって箱の中の猫の生死が確定していないこと自体は，間違いではない．そもそも猫の死という言葉が，猫のすべての体細胞の死滅を意味しているのか，

心臓停止か，脳幹の活動停止を指しているのか，判然としない．こんなに複雑で多義的な事象をたった一つの量子状態 ϕ_2 で表すのは大変粗雑な論理である．もしも，猫の生死が単純な量子状態で表されたとしても，本当に懸念すべきことは，行列要素 $\langle\phi_1|\hat{B}|\phi_2\rangle$ がノンゼロになる物理量 B はあるかという問題である．もしもそのような B があれば，「生きている状態と死んでいる状態の干渉効果」が観測されることになる．しかし，そのような物理量 B がなければ（実際，ない），不気味な干渉は見られない．

第 2 の問題は「箱を開けた途端に猫の状態が生か死の状態に収縮を起こす」のは奇妙だ，ということだろう．観測行為が猫の状態を急激に強制的に変えてしまうとは考えにくい．たしかに，波動関数が箱の中に漂っている物質状のものだとしたら，箱を開けた途端に変わるのは不思議だが，波動関数はそのような存在物ではない．例えば，サイコロの各目の出る確率が 1/6 だからと言って，1/6 の何か物質的なものがサイコロの面に宿っているわけではない．確率は空間中のどこかにある物質ではない．確率は空間を超越した概念である．別の例を挙げれば，選挙の「当選確率」というものが投票箱の中にあるわけではない．予想確率というのはあくまで観測者の視点で定義されるものである．投票箱を開けて票を数え始めれば予想当選確率が更新されるように，猫が入っている箱を開けて何らかの観測をすれば予想確率が変わることはおかしくない．

第 3 に，波束の収縮は観察者に依存するのかという問題がある．猫も知能を持った生物であり，自分が生きていることくらいは観察・自覚できるだろう，だったら箱を開けなくても波束の収縮は起こるのではないか．もしも人間ではなくロボットが観測したら波束の収縮は起きないのか．あるいは，A さんが箱を開けて見た結果を B さんに電話で伝えるのであれば猫の波動関数が変化するのは B さんが電話を受けた時点なのか，といった疑問が生ずる．これも「波動関数は誰から見ても同一の客観的な物質状のものだ」と思うからパラドクスになるのであって，A さんの立場では猫についての予想確率を記述する波動関数があり，B さんの立場では「猫プラス A さん」についての予測確率を記述する波動関数があって，2 通りの波動関数が数学的に整合しているなら，別物でもかまわない．

第 4 に，現実の観測過程は連鎖的だが，波束の収縮はいつ起こるか，という問題がある．例えば猫をカメラで写すなら，波束が収縮するのは，カメラに光が入っ

た瞬間か，それともモニターに映し出された画像を肉眼で見た瞬間か，といった疑問が生じる．これについては慎重な考察が必要だが，基本的には，物理的に消去不可能な記録・痕跡が生じた時点で観測は完了したと考えるのがよい．そのことは後で状態遷移則の議論をするときに考察しよう．

6. 波動関数は実在物か？

波動関数の確率解釈が Born によって提案された後，Schrödinger は猫のパラドクスを提唱した 1935 年の論文の中で「**予測目録**（Erwartungskatalog）としての波動関数」，「波動関数は測定値の確率を予言する手段にほかならない」，「測定のたびごとに波動関数が予見不可能な突発的変化をするとなると，波動関数をそのまま実在の代用物と見なすことはできない」，「この点において素朴実在論との訣別を余儀なくさせられる」と述べている[4, 13]（言葉づかいは若干変えてある）．

予測目録としての波動関数という考え方を前面に押し出したのは，Segal（シーゲル）という数学者だ[14]．彼は，物理系について測定し得る物理量全体の集合 $\mathscr{A}$ を考えた．この枠組みでは物理量 $A, B \in \mathscr{A}$ は演算子ではない．物理量は和 $A+B$，スカラー倍 cA（c は複素数），積 AB などが定義された抽象的なシンボルである．ただし可換律 $AB = BA$ は必ずしも成立しない．物理量のシンボルの非可換代数は，遡れば Dirac の着想である．Dirac は積が非可換な物理量を q-number と呼び，可換な物理量を c-number と呼んだ．q, c は quantum（量子）と classical（古典）を表す．

そして Segal は，物理系の状態 ω は，各物理量 A の期待値 $\omega(A) = \langle A \rangle$ を与える写像であると定義した．つまり，波動関数や密度行列をすっ飛ばして，物理量の期待値（平均値）を与える写像 $\omega : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ こそが**状態**（state）であると規定した．ここで $\mathbb{C}$ は複素数全体の集合である．この意味での状態さえあれば，Hilbert 空間も状態ベクトルも，物理量を表す演算子も，後付けで構成できることを彼は示した（Gelfand と Naimark[15] は state という言葉こそ使わなかったが，同様のことを考えていたため，これは GNS 構成と呼ばれる）．つまり，状態とは，量子的な非可換物理量を古典的な可換データに変換する写像であり，ミクロ量子系がマクロ古典系にはどう見えるかという見え方を決める窓口のようなものだ．

こう考えると，状態は，観測されるミクロ系と，観測するマクロ系の間に位置するものであって，ミクロ系に備わっている物理的実体なんかではないことが了解できる．通常の言葉づかいでは，「胃腸の状態」や「地球内部の状態」のように，「状態」という言葉は「外からは直接見えない，内にこもったもの」を指すことが多いが，ここでは，物理量がミクロ系の内にあり，状態はミクロ系の表面のようなところにあって，この表面を通して物理量が数値となって外のマクロ系に見える形になる，というイメージを描いている．

観測されるものと観測するものの境目は便宜的に選ばれ，変更も可能だから，被観測系と観測系の境目ごとに異なった状態が定義されても問題はない．また，ミクロ系の外に引き出された測定値を観測者を知れば，ミクロ系についての予測は更新される．つまり，ミクロ系からマクロ系への窓口である状態が測定過程の前後で変化するのは格別おかしなことではない．以下では，このことを数学的に定式化しよう．

7. 系の合成・縮小

物理量代数 $\mathscr{A}_1$ と $\mathscr{A}_2$ を持つ 2 つの系をまとめて一つの合成系として扱うことができる．例えば，毒薬の容器と猫をまとめて一つの系として扱うような場合である．合成系の物理量代数は $\mathscr{A}_1$ と $\mathscr{A}_2$ のテンソル積代数 $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$ で与えられる．また，各系の状態が ω_1, ω_2 なら，合成系の状態は $\omega_1 \otimes \omega_2$ で与えられる．ただし，合成系の状態はつねに $\omega_1 \otimes \omega_2$ のような形とは限らず，一般には $\omega : \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 \to \mathbb{C}$ という期待値写像なら何でもよい．物理量代数 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ の表現 Hilbert 空間 $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ がある場合は，テンソル積空間 $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ の元で合成系の状態を表せる．

逆に，大きな系の一部分だけに関心がある状況もある．毒薬容器と猫のうち，毒薬容器だけに注目するような場合だ．数学的には，全体系の物理量代数 $\mathscr{A}$ の部分代数 $\mathscr{B}$ に注目する．このとき，$\mathscr{A}$ に対する状態 ω から，部分系の $\mathscr{B}$ だけに対する状態 $\omega|_{\mathscr{B}}$ が写像の制限によって誘導される．

8. 間接測定モデルと状態遷移則

物理的に有用な「系の変更例」は，ミクロ対象系と測定機器とを合成した系を考えたり，再びミクロ系だけに注目したりする「視点の移動」である．物理ではいろいろなものを測るが，測定とは，対象系と測定器を

相互作用させて，測定器に生じた変化を読み取ることによって対象系について何らかの推測をすることだ．

測定過程を記述するには，対象系の Hilbert 空間 $\mathscr{H}_1$ 上の密度行列 $\hat{\varrho}_1$ と測定器の Hilbert 空間 $\mathscr{H}_2$ 上の密度行列 $\hat{\varrho}_2$ を用いて，対象系の物理量 $\hat{A} = \sum_n a_n \hat{\Pi}_A(a_n)$ と測定器の物理量（メーター物理量）$\hat{M} = \sum_i m_i \hat{\Pi}_M(m_i)$ を測るという状況を考える．対象系と測定器が相互作用すると，$\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ 上のユニタリ演算子 $\hat{U}$ によって全体系の状態は $\hat{\varrho}_1 \otimes \hat{\varrho}_2$ から $\hat{U}(\hat{\varrho}_1 \otimes \hat{\varrho}_2)\hat{U}^\dagger$ に変化する．このとき「A の測定値が a であり，かつ M の測定値が m である確率」は

$$P(A=a, M=m) = \mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2}(\hat{\Pi}_A(a) \otimes \hat{\Pi}_M(m) \hat{U} \hat{\varrho}_1 \otimes \hat{\varrho}_2 \hat{U}^\dagger) \quad (8)$$

で与えられる．これを結合確率という．また「M の測定値が m である確率」は

$$P(M=m) = \mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2}(\hat{\Pi}_M(m)\, \hat{U} \hat{\varrho}_1 \otimes \hat{\varrho}_2 \hat{U}^\dagger). \quad (9)$$

「$M = m$ という測定値を読み取った場合に $A = a$ になる確率」を $P(A=a|M=m)$ と書き，**条件付き確率**と言う．例えば，「人の体重 (A) が 80 kg 以上である確率」と，「胴回り (M) が 100 cm 以上という条件の下で体重が 80 kg 以上である確率」はちょっと別物である．そのような条件付き確率は

$$P(A=a|M=m) = \frac{P(A=a, M=m)}{P(M=m)} \quad (10)$$

で定義される．この条件付き確率を

$$P(A=a|M=m) = \mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_1}(\hat{\Pi}_A(a)\, T_m(\hat{\varrho}_1)) \quad (11)$$

で与える密度行列 $T_m(\hat{\varrho}_1)$ は

$$T_m(\hat{\varrho}_1) = \frac{\mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_2}(\hat{\Pi}_M(m)\, \hat{U} \hat{\varrho}_1 \otimes \hat{\varrho}_2 \hat{U}^\dagger)}{\mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2}(\hat{\Pi}_M(m)\, \hat{U} \hat{\varrho}_1 \otimes \hat{\varrho}_2 \hat{U}^\dagger)} \quad (12)$$

で定まる．$T_m(\hat{\varrho}_1)$ は $M = m$ という測定値を得た後の対象系の状態を表している．つまり，写像 $\hat{\varrho}_1 \mapsto T_m(\hat{\varrho}_1)$ は測定による系の状態変化を記述している．これは波束の収縮の一般化になっている．$\hat{\varrho}_1 \mapsto T_m(\hat{\varrho}_1)$ を状態遷移則と呼ぼう．

このように遷移則を導くと，「波束の収縮はいつ起きるのか？」という問いは大した意味をなさないことがわかる．測定後の状態 $T_m(\hat{\varrho}_1)$ はメーターの読み取り値 m を知っている人が対象系について何らかの予測をするために使うべき「予測目録」である．メーターが多種類あって選べる場合は，どのメーターを用いるか実験中に選んでもよい．メーターの読み取りは一通り実験が完了した後に行ってもかまわない．そのような実験を Wheeler は**遅延選択実験**（delayed choice experiment）と呼んだ[16]．そのような実験でも状態遷移則を使って計算した理論値は実測値と合う．予測目録が $\hat{\varrho}_1$ から $T_m(\hat{\varrho}_1)$ に更新された瞬間などというものはない．実験結果が世界のどこかに痕跡を留めていてメーターの値が読める限り，$M = m$ という値を読んだ場合に起こることは $T_m(\hat{\varrho}_1)$ で予測できる．

特別な場合として，**誤差ゼロの間接測定**モデルを定式化しよう．対象系の物理量 A の値 a_n ごとにメーター M も忠実な値 a_n を指し，しかも，$M = a_n$ という測定値を得た直後にもう一度同じ測定を行えば同じ値 $M = a_n$ が得られるような，理想的な測定過程は

$$\hat{U} = \sum_i \hat{\Pi}_A(a_i) \otimes \hat{V}_i, \quad (13)$$

$$\mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_2}(\hat{\Pi}_M(a_n)\, \hat{V}_i \hat{\varrho}_2 \hat{V}_i^\dagger) = \delta_{ni} \quad (14)$$

を満たす $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ 上のユニタリ演算子 $\hat{U}$ と $\mathscr{H}_2$ 上のユニタリ演算子 $\hat{V}_i$ で記述できる．このとき，読み取り値 a_n の出現確率の公式 (9) は

$$p_n = P(M=a_n) = \mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_1}(\hat{\Pi}_A(a_n)\, \hat{\varrho}_1) \quad (15)$$

となり，Born の公式に帰着する．遷移則 (12) は

$$T_{a_n}(\hat{\varrho}_1) = \frac{1}{p_n} \hat{\Pi}_A(a_n)\, \hat{\varrho}_1\, \hat{\Pi}_A(a_n) \quad (16)$$

となって，Lüders の射影仮説 (7) を再現する．

9. 条件付き期待値と量子消去

誤差ゼロとは限らない一般の測定で，メーター M の読み取り値が m だったという条件の下での対象系の物理量 B の期待値を

$$\begin{aligned} E(B|M=m) &= \sum_n b_n \cdot P(B=b_n|M=m) \\ &= \mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_1}(\hat{B}\, T_m(\hat{\varrho}_1)) \end{aligned} \quad (17)$$

で定義する．また，メーターの読み取り値に関する場合分けをせずに B の期待値を計算すると，

$$\begin{aligned} E(B) &= \sum_i E(B|M=m_i) P(M=m_i) \\ &= \mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2}(\hat{B}\, \hat{U} \hat{\varrho}_1 \otimes \hat{\varrho}_2 \hat{U}^\dagger) \end{aligned} \quad (18)$$

となる．

もともと B の期待値 $\mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_1}(\hat{B}\hat{\varrho}_1)$ がノンゼロの値（干渉効果）だったのに，測定器が働きかけた後，無条件期待値 (18) がゼロになることがある（非干渉化）．しかし，このような場合でもメーターを読み取って B の条件付き期待値 (17) を集計するとノンゼロの値が回復することがある（干渉の回復）．これを**量子消去**

(quantum eraser) と言う[16].

消去と呼ぶ理由：(4) の例では，物理量 A の固有状態では B の期待値がゼロだった．対偶的に，遷移後の状態 $T_m(\hat{\varrho}_1)$ において B の期待値 (17) がノンゼロなら，その状態は A の固有状態ではない．「測定行為のせいで A の値を確実には予測できなくなった，A の測定値に関する情報が消された」ので「量子消去」と呼ぶ．

10. 弱測定

条件付き期待値は，測定器のメーターの読み取り値を限定して対象系の物理量のデータを集計したものであった．それとは逆に，対象系の物理量の値を限定して測定器の読み取り値データを集計すると，どんなことが起こるか？

対象物理量 A の値が a だった場合に，メーター値が $M=m$ となる確率は

$$P(M{=}m|A{=}a)=\frac{P(A{=}a,M{=}m)}{P(A{=}a)} \qquad (19)$$

となり，$A=a$ という条件の下での M の期待値は

$$E(M|A{=}a)=\sum_i m_i\,P(M{=}m_i|A{=}a)$$
$$=\frac{\mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2}(\hat{\varPi}_A(a)\otimes\hat{M}\,\hat{U}\hat{\varrho}_1\otimes\hat{\varrho}_2\hat{U}^\dagger)}{\mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2}(\hat{\varPi}_A(a)\,\hat{U}\hat{\varrho}_1\otimes\hat{\varrho}_2\hat{U}^\dagger)} \qquad (20)$$

で求められる．とくに初期状態が $\hat{\varrho}_1=|a_1\rangle\langle a_1|$ で，測定過程ユニタリ演算子が $\hat{U}=\exp(ig\hat{B}\otimes\hat{J})$ という形をしていて係数 g が小さい場合は，

$$E_{\mathrm{w}}(B)=\frac{\langle a|\hat{B}|a_1\rangle}{\langle a|a_1\rangle},\quad \hat{R}=\exp(igE_{\mathrm{w}}(B)\hat{J}) \qquad (21)$$

を使って (20) は

$$E(M|A{=}a)\simeq\mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_2}(\hat{M}\,\hat{R}\hat{\varrho}_2\hat{R}^\dagger) \qquad (22)$$

で近似できる．これらの式はメーター M の振れ幅が対象系の物理量 B の値で決まることを意味しているが，通常の期待値ではなく，(21) の $E_{\mathrm{w}}(B)$ という値で決まっている．測定相互作用の強さのパラメータ g が 0 に近い極限のことを**弱測定**（weak measurement）と言い，$E_{\mathrm{w}}(B)$ は B の**弱値**（weak value）と呼ばれる．素朴に考えれば，測定相互作用を弱くすればメーターはほとんど振れなくなりそうだが，Aharonov たちは弱測定がメーターの振れを増幅することを発見した[17,18]．また，この方法なら，A と B が非可換な量であっても A の値と B の弱値の両方を測ることができるので，従来のやり方では測れないと思われていたものが測れる．また，弱値 $E_{\mathrm{w}}(B)$ は負の実数にも複素数にもなり得るが，このことを逆手に取って量子論の確率解釈を拡張しようという試みが最近なされている[19,20]．

11. ミクロとマクロの橋渡しとしての波動関数

ミクロ量子の世界は非可換な物理量代数を内蔵しており，マクロ古典の世界は可換な物理量代数で記述される．Segal 流の状態 ω は，非可換な物理量 $A=\sum_n a_n\varPi_n$ を可換な期待値 $\omega(A)$ や確率 $\omega(\varPi_n)$ に変換する写像であり，量子世界から古典世界への窓口であり，変換アダプタである．窓口だからこそ，ミクロとマクロの境界状況に依存するし，引き出された情報次第で更新される．状態（波動関数）は対象系の属性や存在物ではないし，観測者独自の属性でもない．そう認めてしまえばパラドクスに悩まされることもない．

量子力学がミクロ世界の物理理論として成功を収めると，「古典力学は近似理論であり，人間の粗雑な観察を直接的に記述した現象論に過ぎない」という考えが物理学者の間に広まったが，果たしてそれは自然界に対する適切な描像だろうか？

量子的な系の記述には古典論の概念が必要だということを Bohr は強調していた[21,22]．少し長くなるが，Bohr の 1949 年の言葉を引用しよう：《**現象が古典物理学で説明のつく範囲からどれほど外れていても，すべての証拠の説明は古典論の用語で表されなければならない…要するに，「実験」という言葉で私たちが指しているものは，私たちが何を行い何を学んだのかを他人に語ることが可能な状況であり，それゆえ，実験設定や観測結果の説明は，古典物理学の用語を適切に用いることで曖昧さなく表現されなければならない**》．

たしかに測定値や確率は古典物理的な装置で測定され記録される．状態は量子的な物理量に測定値と確率を割り当てる写像であり，結局，状態（state）とは「どういう実験を行うか」という設定（setting, situation）にほかならない．「実験の準備＝状態の準備」であり，実験は古典物理的な方法で用意され記述される．量子論が登場したことによって古典論が用済みになったのではなく，量子論だけでは世界の記述は完結せず，量子的世界に対面する古典的世界を必要としているのである．

謝辞：渡辺圭亮君との議論のおかげで弱値に関する理解が深まりました．彼に感謝しています．

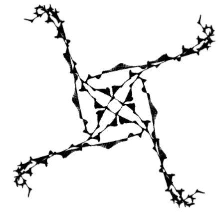
参考文献

1) マンジット・クマール（青木薫 訳）『量子革命—アインシュタインとボーア，偉大なる頭脳の激突』新潮社

(2013).
2) M. Born, *Z. Phys.* **37**, 863 (1926), p.865 の「校正で付け足した註」に「注意深く考察すると，確率は波動関数の展開係数の 2 乗に比例することがわかる」と書かれている．原文はドイツ語．英訳が J.A. Wheeler and W.H. Zurek, *Quantum Theory and Measurement*, Princeton Univ. Press (1984), p54.
3) M. Born, *Z. Phys.* **38**, 803 (1926), 序文と (3), (4) 式の辺りで確率解釈を提示．英訳：`http://www.physics.rutgers.edu/~dbrookes/research/Born/Born.pdf`
4) 湯川秀樹・江沢洋 編著『量子力学 I, II』岩波書店 (1978)．Coulomb 散乱は II 巻 12.3 節，射影仮説は I 巻 4.6 節，「予測目録」は II 巻 16.1 節．
5) M. Born, "The statistical interpretation of quantum mechanics", Nobel Lecture (1954), p.262. Nobel 財団の web page に講演原稿が公開されている．
6) B.L. van der Waerden (editor), *Sources of Quantum Mechanics*, Dover (1968).
7) Interview with Dr. Werner Heisenberg by Thomas S. Kuhn (1963). `http://www.aip.org/history/ohilist/4661_5.html` "this fact that xy was not equal to yx was very disagreeable to me. I felt this was the only point of difficulty in the whole scheme, otherwise I would be perfectly happy."
8) W. Heisenberg, "The development of quantum mechanics", Nobel Lecture (1933), p.293.
9) 数理科学 2012 年 4 月号 p.26, 5 月号 p.20, p.56 など．
10) 谷村省吾「ハイゼンベルク方程式を最初に書いた人はハイゼンベルクではない」素粒子論研究，電子版 **10** 巻 (2011).
11) J. v. ノイマン（井上健 他共訳）『量子力学の数学的基礎』みすず書房 (1957)，III. 3, V.1 節．原著ドイツ語 1932 年．
12) G. Lüders, *Ann. Phys.* **8**, 322 (1951). 原論文はドイツ語．英訳 arXiv: quant-ph/0403007v2.
13) シュレーディンガー「量子力学の現状」，湯川・井上編『現代の科学 II』（世界の名著，第 66 巻）p.357, 中央公論新社 (1970)．原文 1935 年．第 5 節で猫のパラドクス，第 7 節で予測目録としての波動関数が登場．
14) I.E. Segal, *Bull. Amer. Math. Soc.* **53**, 73 (1947). *Ann. Math.* **48**, 930 (1947).
15) I. Gelfand and M. Naimark, *Matematicheskii Sbornik* **54**, 197 (1943).
16) 谷村省吾「光子の逆説」日経サイエンス 2012 年 3 月号 p.32.
17) I.M. Duck, P.M. Stevenson, and E.C.G. Sudarshan, *Phys. Rev. D* **40**, 2112 (1989). 弱値の解説.
18) S. Tamate, H. Kobayashi, T. Nakanishi, K. Sugiyama, and M. Kitano, *New J. Phys.* **11**, 093025 (2009). 弱値と量子消去の関係を明らかにした.
19) H.F. Hofmann, arXiv: 0911.0071.
20) B.L. Higgins, *et al.*, arXiv: 1112.3664.
21) ニールス・ボーア（山本義隆 編訳）『因果性と相補性』岩波書店 (1999)，p.223, 225, 236, 267.
22) 谷村省吾「量子古典対応—量子化の技法，古典系創発の機構」数理科学 2012 年 4 月号 p.19.

（たにむら・しょうご，名古屋大学大学院情報科学研究科）

量子光学における真空状態



古 澤　明

1. はじめに

真空というと何もないような気がする．しかし，量子光学では真空のエネルギーを考える必要がある．つまり，真空でも何かが存在している．本稿では，その不思議な様子について解説する．

2. 真空状態とは

量子光学における**真空（状態）**とは，電磁場を量子化し，光子数に相当する演算子 $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ の固有状態 $|n\rangle$

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle \tag{1}$$

において，$n = 0$ の場合である．もちろん，$\hat{a}$ は場の消滅演算子，$\hat{a}^\dagger$ は場の生成演算子である．つまり，光子数が 0 個の状態 $= |0\rangle$ が真空状態である．ここで，光子数が n 個の状態 $|n\rangle$ における場のエネルギー E_n は

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{2}$$

（$\hbar$ はプランクの定数を 2π で割ったもの，ω は電磁波の角周波数）であるので，真空状態のエネルギーは 0 ではなく，$\hbar\omega/2$ となる．このように，光子数が 0 個でもエネルギーは 0 ではないということが，真空状態を摩訶不思議なものとしている元凶となっている．また，この $\hbar\omega/2$ のエネルギーは電子などでは零点エネルギーとして知られており，位置と運動量の不確定性から生まれているのは周知のとおりである．もう少し詳しく言うと，電子の位置の演算子を $\hat{x}$ とし，運動量の演算子を $\hat{p}$ とした場合，その交換関係が

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \tag{3}$$

であるため非可換であり，不確定性が生まれる．その結果，零点振動が存在し，零点エネルギーが存在するようになる．

このことは，電磁場でも同じである．電磁場の消滅演算子 $\hat{a}$ は，$\hat{a} = \hat{x} + i\hat{p}$ $(\hbar = 1/2)$ のように 2 つのエルミート演算子 $\hat{x}, \hat{p}$ に分解され，これらは電磁波の複素振幅の実部と虚部のような働きをする．ただし，これらは電子のところで出てきた位置と運動量ではない．いわゆる**一般化座標**と**一般化運動量**というもので，実際は電場成分と磁場成分のようなイメージである．

ここで，量子力学の要請から，

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \tag{4}$$

という関係があるので，$\hat{a} = \hat{x} + i\hat{p}$ および $\hat{a}^\dagger = \hat{x} - i\hat{p}$ から

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \frac{i}{2} \tag{5}$$

が導かれる．さらに，上で $\hbar = 1/2$ としていたから，式 (3) と式 (5) は同じものになる．したがって，電子における位置と運動量の不確定性のように，電磁波でも複素振幅の実部と虚部の間に不確

定性が生まれる．これが先ほどの $\hbar\omega/2$ の起源であり，$\hbar\omega/2$ は真空状態エネルギーと呼ばれる．また，零点振動に相当するものを真空状態ゆらぎと呼ぶ．

3. 真空状態とコヒーレント状態

真空状態 $|0\rangle$ には別の側面もある．それは消滅演算子 $\hat{a}$ の固有状態でもあるということである．つまり，

$$\hat{a}|0\rangle = 0 \tag{6}$$

の関係からわかるように，固有値 0 の消滅演算子 $\hat{a}$ の固有状態となっている．ここで，消滅演算子 $\hat{a}$ の一般の固有状態 $|\alpha\rangle$ $(\alpha \in \mathcal{C})$ は以下の関係を満たす．

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \tag{7}$$

この固有状態 $|\alpha\rangle$ は**コヒーレント状態**と呼ばれ，レーザー光線の状態となっている．したがって，真空状態はレーザー光線の複素振幅 α が 0 になった状態 $|\alpha=0\rangle$ とも言える．これから，レーザーからは，振幅が 0 になっても，真空状態 $|0\rangle$ が放射されていることになる．もちろん，レーザーがなくても，そこに真空状態は存在するのだが．

図 1 に $\alpha=1$ のコヒーレント状態における電場振幅（変位）と位相の関係をプロットする．当然であるが，波動としてのサインカーブが存在している．しかし，単なるサインカーブではなく，振幅や位相にゆらぎが存在していることがわかる．実はこれが真空状態ゆらぎである．

実際，図 2 のようにコヒーレント状態の振幅を 0 にすると，真空状態ゆらぎだけが存在する状態，すなわち真空状態が出現する．このように，真空状態では，波動は存在しないが，真空状態ゆらぎ，あるいは量子ゆらぎのみが存在しているのである．正確に言うと，振幅の平均値は 0 で，その分散だけが 0 でないことになる．

この様子を理解するために，別の角度から説明しよう．図 3 に示すように，時間的に強度が変動

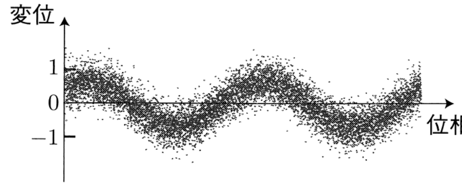


図 1　$\alpha=1$ のコヒーレント状態．

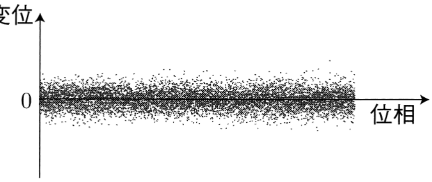


図 2　$\alpha=0$ のコヒーレント状態，つまり真空状態 $|0\rangle$．

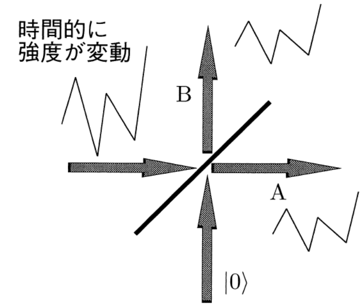


図 3　50/50 ビームスプリッターに時間的に変動する光が入射．

する光が 50/50 ビームスプリッターに入射する場合を考える．ここで，50/50 ビームスプリッターとは透過率，反射率共に 50% の半透鏡のことである．また，光が入射してこない側は真空状態が入射していることになる．これはビームスプリッターの「変換」がユニタリー変換だからである．つまり，2 入力 2 出力の変換にするためには，真空状態も入力とカウントして，2 入力とする必要がある．

50/50 ビームスプリッター後の 2 つの光強度をそれぞれリアルタイムで測定し，さらにその差を測定したとする．どんなに入射光強度が時間的に変動しても，50/50 ビームスプリッター後の 2 つの光強度も，強度が半分になっただけで同じように変動するから，その差は常に 0 であることが想像される．しかし，現実にそのような実験を行ってみると，0 にはならず必ず有限な値が出る．実

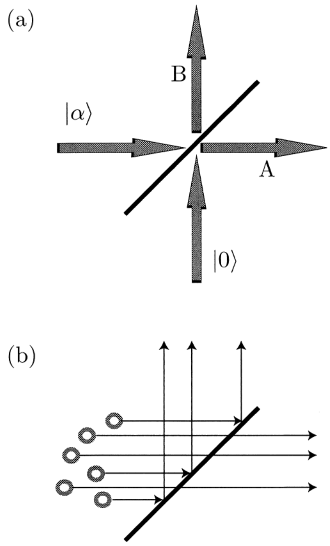


図 4　(a) 50/50 ビームスプリッターにレーザー光線（コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$）が入射．(b) (a) を光子で描写．

は，これが真空状態ゆらぎなのである．その様子を図 4 を用いて説明する．図 4 では簡単のため，レーザー光線（コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$）が 50/50 ビームスプリッターに入射したとしているが，光ならどんな状態でも構わない．

図 4 (b) では，なぜ真空状態ゆらぎが観測されるかを直感的に説明するため，光を光子の集団として表現している．光を光子の集団として考えた場合，1 つ 1 つの光子は 50%の確率で 50/50 ビームスプリッターを透過するか反射することになる．当り前だが，透過した光子は反射側で検出されることはなく，反射された光子は透過側で検出されることはない．したがって，光を光子の集団と考えると，50/50 ビームスプリッターの透過側と反射側で位相反転した強度の変動が現れることになる．位相反転しているため，この差を取るということは和を取るということになるので，結局これだけが検出されることになる．つまり，光子の存在そのものが真空状態ゆらぎの起源となっていることがわかる．

図 4 (a) を別の見方で説明することができる．それは，図 4 (a) は真空状態 $|0\rangle$ のバランス型ホモダイン測定となっているという見方である．このとき，レーザー光線（コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$）はローカルオシレーター光と呼ばれ，バランス型ホモダイン測定器に入射してくる真空状態 $|0\rangle$ と干渉し，その振幅を増幅しているとも考えることができる．干渉の結果，元々単一光子レベルの微弱信号であった真空状態の振幅（真空状態ゆらぎ）を，検出器の熱雑音に打ち勝って，実際に検出できるレベルまで増幅することができる[1]．そのようにして測定されるものが，図 2 なのである．つまり，真空状態 $|0\rangle$ そのものを測定し可視化する方法が図 4 (a) なのである．

4. レーザー発振

ここまでは，真空状態そのものについて説明してきた．ここからは，真空状態からつくられる光の状態について説明しようと思う．正に，「無から有を生む」である．

最たる例は**レーザー**である．レーザーでは真空状態ゆらぎを増幅して発振させている．もう少し詳しく説明しよう．レーザーでは，まず何らかの方法で（光励起や電荷注入：ポンプと呼ぶ），基底状態と励起状態の間で電子の反転分布を生じさせる．励起状態にある電子は有限の寿命を持っているため，初めは確率的に基底状態に落ち，光子を生成する．これを**自然放出**と呼ぶ．自然放出により生成された光子は励起状態にある電子を基底状態に落ちるように仕向ける．これを**誘導放出**と呼ぶ．誘導放出は，自然放出により生成された光子の波動とコヒーレントに起きるから，光は増幅されることになる．十分増幅のゲインが大きければ，発振が起こり，それがレーザー発振である．もちろん，出力される光がレーザー光線である．ここで，自然放出により放出された光子そのものを真空状態ゆらぎと考えることができる．なぜなら，真空状態ゆらぎによる誘導放出により，励起状態にある電子が自然放出をして基底状態に落ちると考えられるからである．

したがって，レーザー発振は真空状態ゆらぎを増幅して発振させているといえる．また，図 1 で

見たように，レーザー発振後も真空状態ゆらぎは存在する．これは，誘導放出が支配的であると言っても，自然放出がなくなるわけではないからである．自然放出は，レーザー発振により生成される光の位相に関係なく，ランダムなタイミングで起き続けるので，それが真空状態ゆらぎ，あるいは量子ゆらぎとして残るのである．

5. スクイーズされた真空状態

真空状態からつくられる，もう 1 つの光の状態について述べよう．それは，**スクイーズされた真空状態**である．スクイーズされた真空状態もレーザー発振同様，真空状態ゆらぎを**位相敏感増幅**（パラメトリック増幅）したものとなっている．ここで，位相敏感増幅とは，光の複素振幅と見なせる消滅演算子 $\hat{a}$ を**ボゴリューボフ変換**して $\hat{b}$ にすることである．つまり，

$$\hat{b} = \hat{a}\cosh r + \hat{a}^{\dagger}\sinh r \tag{8}$$

$(r > 0)$ のような操作である．これは，光の複素振幅の実部と虚部と見なすことができる $\hat{x}$ と $\hat{p}$ で書き直すと，

$$\hat{b} = \hat{x}e^{r} + i\hat{p}e^{-r} \tag{9}$$

となるので，複素振幅の実部である $\hat{x}$ を増幅し，虚部である $\hat{p}$ を減衰させていることになる．したがって，位相敏感増幅となっている．このようなボゴリューボフ変換を行う演算子はスクイージング演算子 $\hat{S}(r)$ と呼ばれ[1]，それは以下のように書ける．

$$\hat{S}(r) = e^{\frac{r}{2}(\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^{2})}. \tag{10}$$

これは，スクイージング演算子 $\hat{S}(r)$ による $\hat{a}$ の「時間発展」

$$\hat{S}^{\dagger}(r)\hat{a}\hat{S}(r) = \hat{a}\cosh r + \hat{a}^{\dagger}\sinh r \tag{11}$$

から確かめることができる．このスクイージング演算子 $\hat{S}(r)$ を真空状態 $|0\rangle$ に作用して生成するのが，スクイーズされた真空状態 $\hat{S}(r)|0\rangle$ ということになる．

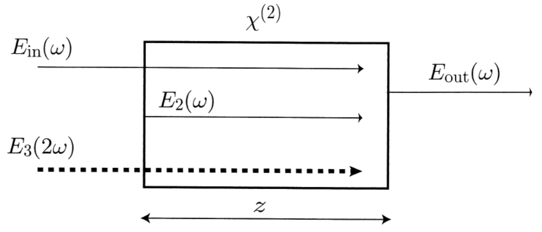


図 5　縮退・光パラメトリック過程．

スクイーズされた真空状態は，図 5 に示した縮退パラメトリック過程により生成できる．ここで，図 5 の中にある $\chi^{(2)}$ は 2 次の非線形光学結晶である．また，$E_{\rm in}(\omega)$ は外部から入力する光の電場（角周波数 ω）であり，$E_2(\omega)$ は，ポンプ光電場（角周波数 2ω）$E_3(2\omega)$ により駆動された，2 次の非線形光学過程である縮退パラメトリック過程により生成される光電場である．もう少し正確に言うと，入力光 $E_{\rm in}(\omega)$ とポンプ光 $E_3(2\omega)$ が 2 次の非線形光学結晶 $\chi^{(2)}$ により結合し，それらの差周波 $\omega = 2\omega - \omega$ の光 $E_2(\omega)$ が生成される．最終的には，角周波数 ω の光として，入力光 $E_{\rm in}(\omega)$ と $E_2(\omega)$ の干渉の結果生まれた $E_{\rm out}(\omega)$ が出力される．この過程の入出力関係は，

$$E_{\rm out}(\omega) = E_{\rm in}(\omega)\cosh r + E^{*}_{\rm in}(\omega)\sinh r \tag{12}$$

となることが知られており[1]，式 (8) と同じであるから，スクイーズ操作を施していることになる．ここで，

$$r = \frac{z}{2c}\cdot\frac{\omega}{n}\left|\chi^{(2)}E_3\right| \tag{13}$$

である．ただし，$*$ は複素共役，z は非線形光学結晶の長さ，c は光速，n は非線形光学結晶の屈折率，$\chi^{(2)}$ は 2 次の非線形光学定数である．

スクイーズされた真空状態 $\hat{S}(r)|0\rangle$ は，入力として特に何も入射しない場合に生成される．何も入射しなくても，真空状態 $|0\rangle$ はどこにでも存在するので，勝手に入力となってくれる．したがって，スクイーズされた真空状態 $\hat{S}(r)|0\rangle$ は，真空状態ゆらぎが入力となり，縮退パラメトリック過程

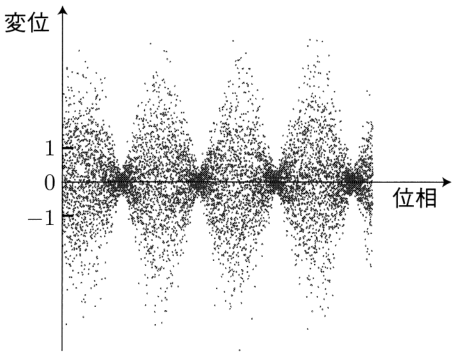


図 6　スクイーズされた真空状態．この状態では，スクイージングレベル e^{-2r} は 0.1 である．10 デシベルのスクイーズと呼ばれる．

により生成されていると言える．ここでも，レーザー発振同様，何もないはずの真空から，スクイーズされた真空状態が生成されたことになる．つまり，ここでも「無から有」を生じている．

ただし，レーザー発振の場合は，図 2 から図 1 の状態に変換しているので，振幅平均値を 0 から $|\alpha|$ へ変換しており，「無から有」を生じている様子が直感的にわかりやすい．一方で，スクイーズされた真空状態の場合は，真空状態ゆらぎが位相に応じて増幅されたり減衰させられたりするだけで，振幅平均値は 0 のままである．つまり，通常の意味での光の波を生んではいない．「無」のままのように思える．しかし，図 6 を見れば明らかなように，量子ゆらぎの小さな部分と大きな部分が周期的に存在し，あたかも「**光の縦波（粗密波）**」のように見える．したがって，ここでもちゃんと，波を生んでいる．

スクイーズされた真空状態 $\hat{S}(r)|0\rangle$ についてもう少し説明しよう．スクイージング演算子 $\hat{S}(r)$ の定義である式 (10) を見ると，生成演算子 $\hat{a}^\dagger$ と消滅演算子 $\hat{a}$ がそれぞれ 2 乗で存在するので，2 個同時に光子を生成するのと 2 個同時に光子を消滅させるという操作を，コヒーレントに行うことになる．それを真空状態 $|0\rangle$ に作用させるわけだから，スクイーズされた真空状態 $\hat{S}(r)|0\rangle$ は偶数個の光子流となる．もう少し正確に言おう．定義に基づいて計算すると

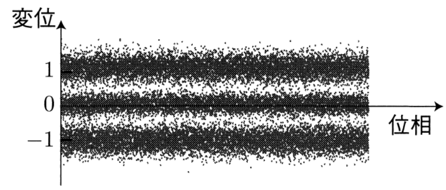


図 7　2 光子状態 $|2\rangle$.

$$\hat{S}(r)|0\rangle = (1-\tanh^2 r)^{\frac{1}{4}} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{(2n)!}}{2^n n!} \tanh^n r|2n\rangle \quad (14)$$

となり，偶数個の光子の重ね合わせ状態となっている．したがって，何もない場を歪ませて（スクイーズして）いるのではなく，位相敏感な増幅を行い，偶数個の光子流を生成しているのである．

ただし，偶数個の光子が独立にランダムに飛んでくるのではない．これはあくまでも重ね合わせとなっている．例えば，$e^{-2r} = 0.5$ (3 デシベルのスクイーズ）の場合，$\tanh r = 1/3$ なので式 (14) を用いると，

$$\begin{aligned}\hat{S}(3\mathrm{dB})|0\rangle &= \left(1-\frac{1}{3^2}\right)^{\frac{1}{4}} \left(|0\rangle + \frac{1}{3\sqrt{2}}|2\rangle + \cdots\right) \\ &= 0.971|0\rangle + 0.229|2\rangle + \cdots \quad (15)\end{aligned}$$

であり，事実上，真空状態 $|0\rangle$ と **2 光子状態** $|2\rangle$ の重ね合わせと考えて良い．一方，真空状態 $|0\rangle$ は図 2 のような量子ゆらぎのみ存在している状態であり，2 光子状態 $|2\rangle$ も図 7 で示したような位相に依存しない状態である．

つまり，真空状態 $|0\rangle$ と 2 光子状態 $|2\rangle$ が重ね合わされて初めて，位相に依存した構造＝縦波が生まれるのである．このように，真空状態 $|0\rangle$ は量子ゆらぎしかない状態であるが，位相の「基準」のような役割をしており，コヒーレンスの起源になっていると言える．その証拠に，式 (15) のスクイーズされた真空状態における 2 光子状態 $|2\rangle$ の重ね合わせの符号を反転し

$$0.971|0\rangle - 0.229|2\rangle + \cdots \quad (16)$$

のようにすると，スクイーズされる位相が見事に反転する．式 (15) の状態では，p 成分が e^{-r}

($r = \ln 2/2$) だけスクイーズされていたが，式 (16) の状態では，x 成分が同じだけスクイーズされる．このように，真空状態 $|0\rangle$ は位相の「基準」なのである．

6. 真空状態と単一光子状態の重ね合わせ

真空状態 $|0\rangle$ が位相の「基準」という意味では，真空状態 $|0\rangle$ と**単一光子状態** $|1\rangle$ の重ね合わせを考えても面白い．つまり，$(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ と $(|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$ について考えるのは面白い．

単一光子状態 $|1\rangle$ を図示すると，図 8 のようになる．単一光子状態 $|1\rangle$ も 2 光子状態 $|2\rangle$ 同様，位相に依存しない状態となっている．ところが，単一光子状態 $|1\rangle$ を真空状態 $|0\rangle$ と重ね合わせると，位相に依存する構造＝波が出現する．図 9 に $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ を，図 10 に $(|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$ を示す．図 9 と図 10 を比べれば明らかであるが，これらはいずれも波の構造を持ち，位相が反転した波となっている．違いは，単一光子状態 $|1\rangle$ の真空状態 $|0\rangle$ への「相対位相」が反転しているだけなので，この相対位相が波全体の位相を決めていると言える．単一光子状態 $|1\rangle$ は，典型的な「粒子」であるから，真空状態 $|0\rangle$ と重ね合わせることで，波に変換されると考えることができる．つまり，粒子から波への変換において，真空状態が重要な役割を担っている．

レーザーの状態であるコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ でも同様である．図 1 に示した，$\alpha = 1$ のコヒーレント状態 $|\alpha = 1\rangle$ を光子数状態 $|n\rangle$ の重ね合わせとして書くと

$$|\alpha{=}1\rangle = e^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{-\frac{1}{2}} \left(|0\rangle + |1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|3\rangle + \frac{1}{2\sqrt{6}}|4\rangle + \cdots \right) \quad (17)$$

となる[1)]．また，位相反転した $\alpha = -1$ のコヒーレント状態 $|\alpha = -1\rangle$（図 11）を光子数状態 $|n\rangle$ の重ね合わせとして書くと

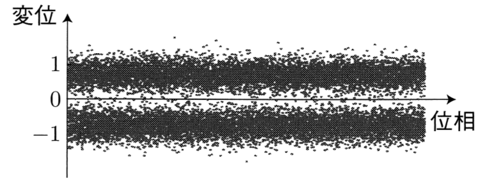


図 8　単一光子状態 $|1\rangle$.

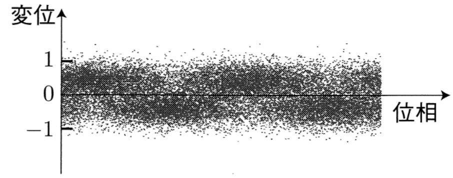


図 9　$(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$.

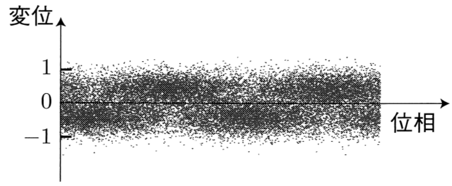


図 10　$(|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$.

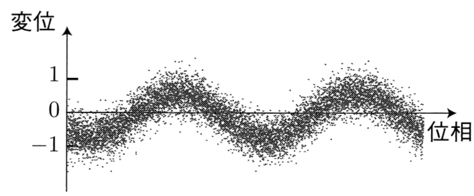


図 11　$\alpha = -1$ のコヒーレント状態.

$$|\alpha{=}{-1}\rangle = e^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{-\frac{1}{2}} \left(|0\rangle - |1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|3\rangle + \frac{1}{2\sqrt{6}}|4\rangle - \cdots \right) \quad (18)$$

となり，単一光子状態 $|1\rangle$ 以降の奇数光子数状態の真空状態 $|0\rangle$ に対する相対位相が反転している．つまり，位相反転したコヒーレント状態においても，$(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ と $(|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$ のときと同様に，真空状態 $|0\rangle$ に対する相対位相により全体の位相が決まっていることがわかる．

7. シュレーディンガーの猫状態

最後に，真空状態を消去する（何もない真空を消去する？？）ことが本質である，スクイーズされた真空状態 $\hat{S}(r)|0\rangle$ から**シュレーディンガーの猫状態**を生成する過程について述べる．

2つのコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ と $|-\alpha\rangle$ の重ね合わせをシュレーディンガーの猫状態と呼ぶ．その理由は，コヒーレント状態は多数の光子を含み，ある意味，巨視的な状態＝猫であり，その重ね合わせだからである．$\alpha=1$ のシュレーディンガーの猫状態，つまり $N_{\alpha-}\big(|\alpha=1\rangle-|\alpha=-1\rangle\big)$ を図示すると，図 12 のようになる．この状態は，図 13 に示した，4 デシベルスクイーズした真空状態（4 デシベルのスクイーズ：$e^{-2r}=0.398$）$|\mathrm{sqz}-4\mathrm{dB}\rangle$ から 1 つだけ光子を引き去ることで極めて近い状態を生成できる．それは以下のように理解できる．まず，4 デシベルスクイーズした真空状態 $|\mathrm{sqz}-4\mathrm{dB}\rangle$ は式 (14) から次式で書ける．

$$|\mathrm{sqz}-4\mathrm{dB}\rangle=0.950|0\rangle+0.289|2\rangle+0.108|4\rangle+0.0424|6\rangle+\cdots. \tag{19}$$

次に，$\alpha=1$ のシュレーディンガーの猫状態は次式で書ける．

$$N_{\alpha-}\big(|\alpha=1\rangle-|\alpha=-1\rangle\big)=0.922|1\rangle+0.377|3\rangle+0.00769|5\rangle+\cdots. \tag{20}$$

ここで，1 光子引き去りとは，式 (19) の状態に消滅演算子 $\hat{a}$ を作用させることである．この結果，$\hat{a}|0\rangle=0$ などに注意し，さらに規格化すると次式のようになる．

$$|\mathrm{sqz}-4\mathrm{dB}\ 1\,光子引き去り\rangle=0.929|1\rangle+0.347|3\rangle+0.136|5\rangle+\cdots. \tag{21}$$

これは，$\alpha=1$ のシュレーディンガーの猫状態，つまり式 (20) の状態に極めて近くなっている．1 光子引き去りの本質は，$\hat{a}|0\rangle=0$ であり，真空状態消去となっていることを確かめるために，4 デシベルスクイーズした真空状態の図 13 から真空状態の図 2 の部分を取り除いてみる（変位（振幅）が 0 近傍の成分を取り除く）．すると，図 12 に近くなることがわかるので，1 光子引き去りの本質は真空状態消去であることがわかる．

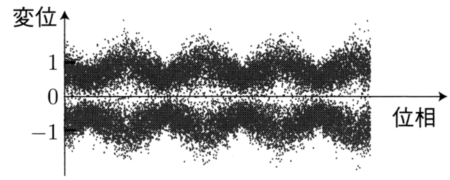


図 12　$\alpha=1$ のシュレーディンガーの猫状態．

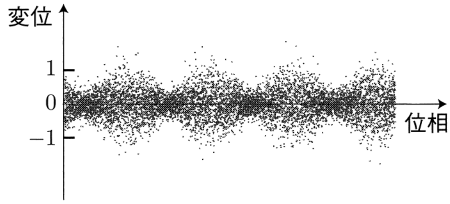


図 13　4 デシベルスクイーズされた真空状態．

8. おわりに

以上，量子光学における真空状態とそれに関連する光の状態について述べてきた．真空状態は何もない状態ではなく，量子ゆらぎが存在し，さらに，光の位相の根源であることが理解してもらえたと思う．

参考文献

1）古澤　明，『量子光学と量子情報科学』数理工学社 (2005).

（ふるさわ・あきら，東京大学大学院工学系研究科）

電荷
物理学の王様



青木 健一

1. はじめに

電荷とは，素粒子の持つ電気量のことである．例えば電子の電気量は e と書かれ素電荷とも言う．これまでに発見されているすべての素粒子の電荷はこの整数倍だからである．

電子と電子が距離 r だけ離れた位置にいると，同じ符号の電荷なので斥力となる**電気力**が働き，その大きさは k を定数として，

$$F_e = k\frac{e^2}{r^2} \tag{1}$$

となる．いわゆるクーロンの法則である．

これは電気力より以前に発見された**重力**（万有引力）の法則とよく似ている．電子の質量を m と書くと，2つの電子の間に働く重力は，

$$F_G = G_{\mathrm{N}}\frac{m^2}{r^2} \tag{2}$$

であって，G_{N} はニュートン定数と呼ばれる．この2つの法則は距離の依存性が全く同じであるが，大きさの違いはすさまじい．電気力と重力の大きさの比は，

$$\frac{ke^2}{G_{\mathrm{N}}m^2} = 4.2\times 10^{42} \tag{3}$$

にもなり，素粒子の世界では，そしてこの記事においても，重力は最後にしか登場しないのである．

本稿では，素粒子の電荷という存在がどのように認識され，その理解がどのように変貌してきたか，そして逆に，電荷の側が物理の理論をどのように支配し変革してきたのかを，現代物理学に見ていく．それは，時には物理学者を絶望に落とし，次には驚くべき新概念を生み，それまでは考えられもしなかった新しい理論への道筋がつく，というダイナミックなものであった．電荷はわがままな「王様」なのである．電荷は疑いようのない「存在」であり，素粒子の最高位の属性だからこそ，物理学の王様としての力は絶大である．

2. 電荷は物質を作る

電荷は素粒子の属性である．それは素粒子の**相互作用**を通じて観測されるもので，どのくらいの強さで**電磁相互作用**を行うのか，という能力の大きさを示す．相互作用とそれを用いた観測なしには，属性を決めることもできないのだから，素粒子の相互作用と属性はほとんど同じ概念である．

力学と重力の法則が**ニュートン**によって構成されて後，19世紀中葉に，**マックスウェル**は電気と磁気に関する種々の法則をまとめあげて**電磁気学**を作った．空間の各点に電場と磁場が存在し，それらの**場**と電荷・電流（動く電荷）が満たす運動方程式が書き下された．マックスウェルはこの方程式に，電場と磁場が振動しながら進む波（電磁波）の解があることを発見し，その速度を計算したところ，当時知られていた光の速度に近かった．そこで，光こそ電磁波であると予言した．電磁波の存在は，この予言から20年以上を経てヘルツによって実証され，光の正体が明らかになった．

物質が細かい原子でできていること，原子は軽い電子と重い陽子等でできていること，電子と陽子はちょうど逆符号の電荷を持っていて，普通の原子は電気的に中性であること，電子と陽子の間の電気的な引力がお互いを束縛して原子を作ること，が徐々に解明されてきた．これを現代流に言えば，まずこの世には電磁相互作用があり，電子や陽子はその相互作用の能力があって，その強さは e である．すなわち，電子や陽子は，電場や磁場を作る能力，電場や磁場を感じる能力があり，その能力の大きさが電荷 e なのである．

19 世紀末までに，ニュートンの力学，マックスウェルの電磁気学が完成し，さらにボルツマンらによって創始された統計力学が熱学を分子論の立場から説明して，古典物理学の体系ができあがった．できあがるやいなや，深刻なパラドックスが明白になる．一つは，光の速度の矛盾，もう一つは，光の熱力学の矛盾である．

光の速度は観測者によらないというマイケルソン・モーレイの実験結果は，速度とは相対的な概念である，を大前提にしてきた古典力学では光は捉えられないことを示した．光が電磁波であり物質中の電子が簡単に光を放出・吸収できることから，光もまた熱力学によって扱える力学的自由度であり普通の物質と熱平衡にあるならば，エネルギー等分配の法則は火にかけた「やかん」の中の光にも適用される．すると，光の波長はどんなに短いものも可能なので，光に分け与えるエネルギーの合計が無限大になり，やかんのお湯はいつまでたっても沸かない．すなわち，空間の比熱が無限大，というパラドックスである．

どちらも光が主役であり，どちらもがアインシュタインによって切り開かれた．光の速度の絶対性は時空の絶対性を奪いとり，**相対性理論**となった．やかんの中の光にエネルギーをとられないように光はつぶつぶからなるというプランクのエネルギー量子仮説，アインシュタインの光量子仮説を経て，**量子力学**が成立する．この相対性理論と量子力学が 20 世紀物理学の骨となる．大きな矛盾ほどそれを解決したときの進歩もまた大きい．そしていよいよ電荷が王様の衣をまとって静かに登場する．

3. 電荷は確率

量子力学は原子の内部，原子核と電子の系に適用され，原子の持つとびとびのエネルギーから放出・吸収される光の線スペクトルを説明して成功をおさめた．すると，電磁気学もまた，単に自由度の多い力学に過ぎないと見るなら，それを量子力学に昇格させようとするのは当然の勢いである．空間の各点で定義される電場や磁場は，空間の座標という名前のついた力学変数である．その古典力学がマックスウェルの電磁気学ならば，それの量子力学版を作るのは簡単に思える．単に，自由度が無数にある系に拡張するだけである．実際，量子力学完成の数年後には理論構成は済んだ．

これは空間の各点にある「場」という力学量の量子力学という意味で，**場の量子論**，あるいは，場の理論と呼ばれ，現在，物質の存在とその運動を記述する基礎理論となっている．しかし，その完成には予想外の困難が待ち受けていた．もちろん，それを克服することによって得られる新概念もまた予想外の大きさであった．

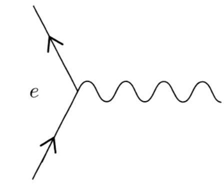


図 1　基本ファインマン図.

電磁気学の量子力学版を**量子電気力学**と呼ぶ．電場と磁場が量子化され，対応する量子を光子という．光子はとびとびのエネルギーを持つことになり，粒子的な姿を持つ．すなわち振動数 ν の光は，ひと粒が $h\nu$ のエネルギーを持つ光子の集まりであることがわかった．つまり，アインシュタインの光量子仮説は，量子力学によって 20 年後に演繹された．

量子電気力学には電場と磁場に加えて，電子等の素粒子も登場する．電子もまた，もともと電子の「場」が空間の各点に存在し，その量子化によってとびとびのエネルギーを持つことになり，それが電子という粒子像を与えていることがわかった．すべての素粒子は対応する場の自由度に起源があり，粒子性と波動性は場の量子論の中で完全に統一されて理解された．

場の量子論では，素粒子の間の相互作用を，**ファインマン**が発明した**ファインマン図**（**ファインマン・ダイアグラム**）を用いて表す[1)]．例えば，電子は電磁波を放出・吸収できるが，それを素粒子の言葉で言うと，電子が光子を放出・吸収できると記述し，基本ファインマン図（図 1）で表す．実線は電子で矢印は（負）電荷の流れる方向を表し，波線が光子である．この基本ファインマン図をどんどん組み合わせていくと，あらゆる可能な反応を表現することができる．

このファインマンの発明は実に見事なもので，ファインマン図は素粒子論に限らず現代物理学になくてはならない概念になっている．もちろん，図を描くだけなら何がありがたいのか疑問に思われるだろうが，実は，これは図ではなく式なのである．つまり，図の構成要素にそれぞれ式が対応しており，図を描いていくと，それが積分を含んだ式を意味して，その式を計算すると，量子力学的な確率が計算できるのである．

さらに，ファインマン図には時間の向きがない．これがすばらしい．まず，電子の線については，時間の

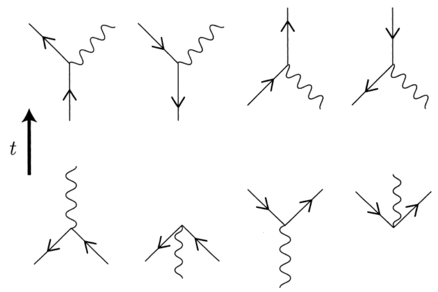


図 2　時間進行.

向きと矢印の向きが一致していれば電子，逆ならば陽電子と解釈する．例えば基本ファインマン図（図 1）の一つの図で，電子・陽電子（電子の反粒子）が光を放出あるいは吸収，さらに，電子と陽電子が対消滅して光になる，電子と陽電子と光がまとめて消滅，光が電子と陽電子を対発生する，電子と陽電子と光が無から生成，の計 8 通りの過程の可能性を同時に表現しているのである（図 2）．量子力学にはいろいろな過程があるのだが，それらを一気にまとめて表現することによって，計算も一気に済ませられるのである．

さて，基本ファインマン図（図 1）には，式としては電子の電荷 e が付される．これは電子と光子の結合の大きさを表している．つまり，電荷とは，素粒子が光子を放出・吸収する量子力学的な確率振幅を与えるものであったのだ．**確率**はファインマン図による計算結果を最後に 2 乗して得られるので，この基本ファインマン図だけを使うなら，その確率は e^2 に比例する．

4. 電荷は発散する

ここまでは，つまり量子電気力学の構成の段階までは問題はなかった．問題は，**量子補正**の計算で起こった．量子力学では，古典力学と異なり，エネルギー的に許されない**中間状態**を経てある状態から別の状態に移ることが可能である．有名な例は，トンネル効果と呼ばれるものである．

地上に図 3 のような形のジェットコースターがあったとしよう．レールの形はそのまま重力によるポテンシャルエネルギーを表している．このコースターの左から出発した車は，レールの底で最も速くなる．そして坂を登るに連れて遅くなり，最初と同じ高さまでしか登れない．古典力学では，運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和は保存し，運動エネルギーは負にはなれないからである．

量子力学では結果が異なる．山を越えて，向こう側

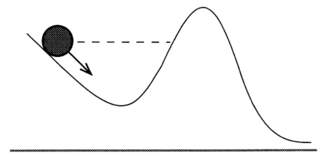


図 3　ジェットコースター.

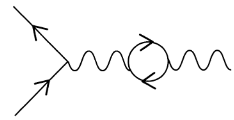


図 4　量子補正項.

に通り抜ける（トンネルする）確率がゼロではない．いつでも通り抜けるわけではなく，古典力学の場合のように跳ね返ってくるものと，通り抜けるもの，の両方の可能性がある．通り抜けるからには，途中でエネルギー的に許されない領域を通過しているが，量子力学はそれを可能とする．

量子電気力学で今の事情を考慮に入れると，例えば図 4 の過程が可能になる．電子が放出した光子が途中で電子と陽電子に別れ，再びそれらが結合して光子に戻る過程である．これは電子が光を放出する現象に加えるべき項であり，量子補正と呼ばれる．

この過程の途中の状態はエネルギー的に許されない状態でもよく，無数に存在する．図 4 において，光子が電子と陽電子に別れるとき，電子のエネルギーはいくら大きくてもよく，それをすべて足す．量子補正はいろいろなファインマン図から発生し，しかも一つの図は無限個の可能性を含む．式の中にその無限の可能性の和を表す無限大までの積分が現れる．図 4 に対応する式には，

$$-e^3 \int_E^\infty \frac{1}{E'} dE' \qquad (4)$$

のような積分が現れる．積分の下限の E は走っている光子のエネルギーであり，E' についての積分は中間状態の電子のエネルギー E' の可能性をすべて足すことを意味している．e が 3 乗で出てくるのは，基本ファインマン図を 3 回使っているからである．計算すると，

$$-e^3 \log \frac{\infty}{E} \qquad (5)$$

となり，この積分は発散している．つまり有限な答えが得られないのである．

とにかく，この量子補正を加えれば，電子の電荷が次のように補正されたことになる．

$$e_{\mathrm{obs}}(E) = e - e^3 \log \frac{\infty}{E}. \qquad (6)$$

左辺の e_{obs} が**観測**されるはずの量子補正込みの電荷である．しかしその補正項は**無限大**，手の打ちようがない，場の量子論はだめだ，ミクロの理論の構築は量子力学のさらなる変革を求めている，と多くの人は考えた．発散する電荷の量子補正はこのように物理学の理論全体を危機に陥れた．

5. 電荷はくりこまれる

このとき，冷静に危機を回避する方法を考えていたのが，**朝永振一郎**たちである．式 (6) をそのまま見ると補正が無限大になっておかしく見えるが，しかし，私たちが観測している電荷は右辺の量の全体であって，もともとの電荷 e（これを**裸の電荷**と呼ぶ）の単独の値を観測する方法は実はないのである．それならば，この右辺全体，すなわち，e_{obs} こそが観測されている電荷であるとし，それを有限な観測値にするような裸の電荷 e が逆に決まる，と考えればどうだろう．

では，式 (6) の中の ∞ が消えるように e を決めよう．e の 3 次より高い項は無視して，

$$e = e_\mu + e_\mu^3 \log \frac{\infty}{\mu} \qquad (7)$$

と置くと ∞ 部分は消える．有限の部分は決まらないので，適当な有限の量 e_μ と μ というエネルギー次元を持った量を使った．

裸の電荷 e は原理的に直接観測できないので，無限大であっても気にする必要はない，いや，気にしないことにしよう．量子補正込みの電荷 e_{obs}（これを**くりこまれた電荷**という）を有限の観測値として，その他のすべての物理量がこの e_{obs} の有限な関数で表されれば（これがうまく行く場合を，理論は**くりこみ可能**である，という），無限大は表には出ない．量子電気力学はくりこみ可能であることが証明され「**くりこみ理論**」となって，ファインマン図のファインマン，シュウィンガーとともに朝永に 1965 年ノーベル物理学賞が授与された．こうして量子電気力学の危機は回避され，いろいろな物理量が計算可能になり，その実験との一致は驚くべき精度で，現在までいかなる矛盾も見つかってはいない[2)]．

6. 電荷は近づくと増加する

くりこみ理論の結果をちょっと詳しく見てみよう．式 (7) を式 (6) に代入する．

$$e_{\mathrm{obs}}(E) = e_\mu + e_\mu^3 \log \frac{E}{\mu} \qquad (8)$$

この式から観測される電荷は光子のエネルギー E によって変わることがわかる．そして裸の電荷を決めるときに必要だった定数 e_μ と μ の意味もはっきりする．式 (8) の E に μ を代入すると，

$$e_{\mathrm{obs}}(\mu) = e_\mu \qquad (9)$$

となる．エネルギーが μ のときの電荷の大きさが e_μ である．電荷が光子のエネルギーによってどう変わるかを図 5 に示す．横軸は対数目盛にしてあるので，直線グラフになる．

光子のエネルギーが高いということは，その振動数 ν が高い，すなわち，波長が短いということである．波長の短い光を放出・吸収する状況は，ミクロの世界での現象に対応する．すなわち電子の電荷は近づいて観測すると大きくなるのである．これまで，物理定数であった電子の電荷が，どれくらい近づいて観測するかによって変わるというのは，くりこみ理論による量子補正計算の結果であり，全く新しい概念を物理学にもたらした．

くりこみ理論は成功したが，ほとんどの物理学者に欲求不満が残った．トフーフト（1999 年ノーベル物理学賞）流に言えば，くりこみとは，急にお客さんが来たら部屋の無限大は絨毯の下に掃き入れてしまえだ，と批判された[3)]．朝永自身も，くりこみ理論自体はうまくいくが，どうしても数学的なトリックに思えるし，そもそもどうして理論がくりこみ可能になっているのかがわからない，という点をずっと気にしていた．つまり，量子電気力学はくりこみ可能であることが証明できるが，素粒子の相互作用はそれだけではなかった．

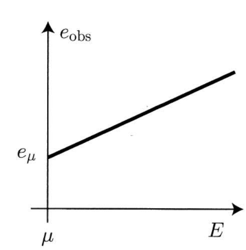


図 5　観測される電荷の変化．

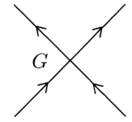


図 6　弱い相互作用の基本ファインマン図．

ベータ崩壊を記述する弱い相互作用は，量子電気力学のように光子を交換するタイプではなくて，図6のように直接，電子や陽子が相互作用していると見えた．途中に光子のような粒子が飛ばないのである．このタイプの相互作用は場の量子論としてくりこみ可能ではないことを名古屋の坂田昌一たちが証明した．つまり無限大を全部絨毯の下に入れることはできない状況が現れた．

7. 電荷は再び発散する

その頃，くりこみ理論の結果 (8) に別の不満を持つ人たちがいた．光子のエネルギー E をどんどん大きくしたら，e_μ^2 は小さくても $\log(E/\mu)$ のほうが勝って，補正項のほうが大きくなる．物理学者はこういう状況を嫌うのである．そして，大きくなる項は全部先に足しておきたいと考える．これを実行したのがロシアのランダウたちである．

彼らは $e_\mu^2 \log(E/\mu)$ をひとまとめにして考えた．これを x と書く．すると，補正された電荷は

$$e_{\mathrm{obs}}(E) = e_\mu(1+x) \qquad (10)$$

である．E が大きくて x が1に近づくときには，x だけでなく $x^2, x^3, \cdots$ も全部計算しなくてはだめだとして，長大な計算を行った．その結果は，

$$e_{\mathrm{obs}}(E) = e_\mu(1+x+x^2+x^3+\cdots) \qquad (11)$$

となり，えいっとまとめて

$$e_{\mathrm{obs}}(E) = \frac{e_\mu}{1-x} \qquad (12)$$

とした．これは後にくりこみ群と呼ばれることになる場の量子論必須の計算技法の世界初演であった[2]．

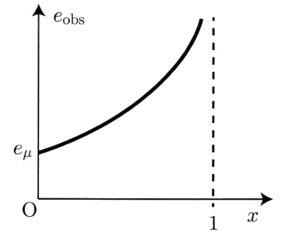


図7　補正をすべて加えた電荷の変化.

式 (12) を図7に示す．なんと $x=1$ の所で無限大になってしまう．朝永たちが絨毯の下に隠したのとは異なるタイプの無限大が現れた．

この無限大は深刻である．これは電子に近づいていくと観測される電荷がどんどん大きくなり，ついにはある距離で無限大になって終わり（？），ということだ

からもうどこにもくりこめない．ある距離よりミクロのところでは，量子電気力学は理論ではなくなることを証明してしまった．

しかし，ランダウも朝永もそれほどあわてたわけではない．量子電気力学が無効になる距離は極めて短距離で，そこに実験が到達する以前に他の相互作用が絡まってくるはずだ，と見通していたからである．実際，重力と電磁相互作用に加えて，弱い相互作用，強い相互作用という合わせて 4 つの相互作用があることがはっきりし，くりこみ理論が適用できそうにない弱い相互作用や**強い相互作用**に研究の重点は移っていった．素粒子の数が実験をするたびに増えていくにつれ，場の理論とくりこみ理論に対する信頼は細くなっていった．

8. 電荷に別の種族現る

1960 年代後半にいたり，このような状況は激変する．一つ目は弱い相互作用の新理論が出たことである．つまり，図 6 のように直接的に電子たちが相互作用するのは低エネルギーでの実験結果からの結論であり，もっと高エネルギー，つまりもっと近づいて見ると，実は図 8 のようになっている，というのだ．

中をとりもつ粒子は W ボソン，Z ボソンと呼ばれ，光子に似た性質を持つが，質量がゼロの光子とは異なり，陽子の 100 倍近い質量を持つと仮定された．重いので，中間状態で現れても長い時間は存在できず，光子と異なり到達距離が短くて，それまでの実験では図 6 のようにしか見えなかった，と考えた．この理論の画期的な点は，図 8 になると，量子電気力学と同じ構造の理論になり，弱い相互作用もくりこみ可能になることである[4]．

二つ目は強い相互作用の正体の解明である．強い相互作用をする素粒子はハドロンと呼ばれるグループを構成し，次々とその種類と数を増やし，素粒子のテーブルは数百もの粒子であふれた．これはどう考えても，ハドロンはもっと基本的な構成粒子から作られている複合粒子であるに違いない．この考えを世界をリードして最初に推し進めたのは名古屋の坂田たちであった．

ここでも電荷が彼らを束縛した．坂田たちは構成子といえども，電荷を素電荷の整数倍にすることにこだわった．それまでに発見されていた電荷はすべてそうだったからである．それに対して，むしろ構成子を実体と思わず単なる数学的な表象程度に思っていたゲルマンたちは，1/3 や 2/3 の電荷を持つ**クォーク**をためらいもせず導入した．結局，この分数電荷を持つクォーク理論がいろいろな実験事実から確かめられるに至った．電荷 1/3 と聞くと「割り切れない」印象があるが，クォークの電荷のほうを単位と考えるなら，電子の電荷が 3 になり，違和感はない．新理論を作るときには，こだわるべきことと，こだわってはいけないことの切り分けが正否をわけるのである．

次々と高いエネルギーの加速器が作られ，ついには陽子の中を詳しく見る実験が始まった．そして，陽子は 3 つのクォークで作られていることが明らかになった．しかし，現時点でもクォークは単体では取り出されていない．これは，クォークの閉じ込めという強い相互作用の持つ不思議な性質によるものと現在では理解されている．実は，この閉じ込めの結果，クォークの多体系であるハドロンの電荷は，すべて素電荷の整数倍になっているのである．さて，問題はいまやクォークの相互作用である強い相互作用の性質である．実験が明らかにしたことは，この強い相互作用は，クォークに近づいていくと弱くなるというのだ．この性質を，**漸近自由性**と呼ぶが，これは驚愕であった．

量子電気力学では，式 (10) にあるように電荷は近づくと大きくなるのだった．逆にするにはどうするか．それは簡単，x を $-x$ にすればよい．しかしこの補正項の符号が逆になっている理論を見つけるのは容易ではなかった．この符号はたまたま正になっているわけではない．正になるもっと深い理由がある．もし量子力学的な中間状態がすべて正確率で現れる状態ならば，これは正になる．確率というのはその定義からして正のはずなので，これを破るには相当な道具立てがいる．

それを見つけたのが 2004 年ノーベル物理学賞「漸近自由性の発見」の**グロス**，**ポリツァー**，**ウィルチェック**であり，強い相互作用は量子電気力学を拡張した**量子色力学**で記述されることがわかった[5]．その基本ファインマン図は図 9 である．実線はクォーク，くるくる

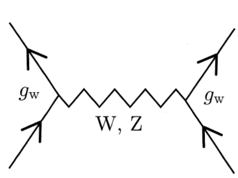


図 8　弱い相互作用の新理論．

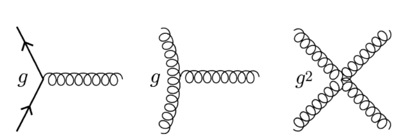


図 9　強い相互作用の基本ファインマン図．

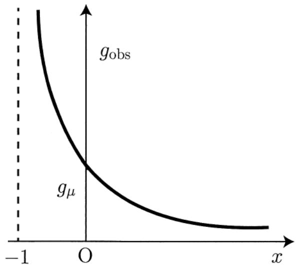


図 10　補正をすべて加えたカラー電荷の変化.

線はグルーオンと呼ばれる粒子であり，電荷はカラー（色）電荷 g となる．量子色力学では，グルーオンはグルーオンを放出・吸収できる．これは光子にはできない．これが本質的な違いとなり，補正項の符号が逆転する．

式 (12) の x を $-x$ に置き換えて，補正をすべて加えたカラー電荷の変化は

$$g_{\rm obs}(E) = \frac{g_\mu}{1+x} \tag{13}$$

となる（図 10）．カラー電荷はクォークに近づけば近づくほど小さくなり，量子色力学はミクロの極限まで有効となる．逆に，低エネルギーつまり長距離側でカラー電荷は強くなり，$x = -1$ で無限大になる．

しかしこれは問題にはならない．長距離で強くなるカラー電荷によって，クォークはハドロンの外には出られず閉じ込められる．つまり，カラー電荷が無限大になるところまで離れられないので，理論が矛盾するわけではない．

9. 電荷は統一する

漸近自由性の発見によって，場の理論とくりこみ理論は素粒子論を席巻した．弱い相互作用は電磁相互作用と統一されて**電弱相互作用**となり，光子と W/Z ボソンは近い仲間となった．これが**ワインバーグ・サラム理論**であり 1979 年ノーベル物理学賞が授与された．統一後，電荷 e と弱電荷 G を混ぜ合わせたような電弱電荷 $g_{\rm W}$ が 2 種類現れる（図 8）．図 11 を見れば，量子電気力学の電荷がミクロに行くと発散するというのは，まさに杞憂であったことがわかる．そこまで行くずっと前に弱い相互作用とくっついてしまった．ただし，電弱電荷の一つは量子電気力学と同じ補正項の符号を持っているためにミクロに行くと少し大きくなる．

図 11 の左上から急速に下がってくるのが強い相互作用のカラー電荷である．ミクロに行くと，3 つの電

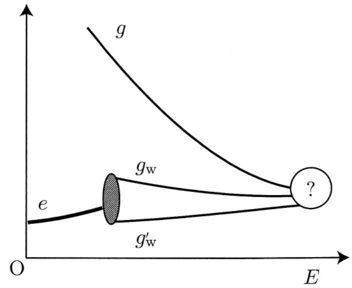


図 11　統一理論への道.

荷が同じ大きさになるのではないか，と気づく．電荷の大きさが同じなら，相互作用も同じ，つまり**大統一理論**が予想される．

しかも，これらの電荷が同じ大きさになるほどの高エネルギーは，これまで素粒子の相互作用としては弱すぎて何の役割も果たしてこなかった重力相互作用が急に大きくなる領域に近い．重力相互作用は，当初は式 (2) のように，質量をいわばその電荷としていた．アインシュタインの相対性理論によって質量とエネルギーは等価であることが導かれ，高エネルギーの素粒子は，そのエネルギーを重力相互作用の「電荷」として相互作用する．このために，ミクロに行くほど重力相互作用は強くなる．すると，いよいよ重力も含めたすべての相互作用の統一理論を考えたくなるのである．

ヒッグス粒子が 2012 年に発見された．それは，図 11 のような種々の電荷のミクロでの変化と，それが要求する統一理論への道を具体的に実証していく時代がいよいよ始まることを示唆している．素粒子論には，ダークマターやダークエネルギー，ニュートリノ質量などの未解決の多様な問題があり，それらのすべてを解決する統一理論が希求される．そして，まだまだ，電荷たちは王様であり続ける．

参考文献

1) 青木健一：「ファインマン・ダイアグラム―素粒子反応を計算する図―」，数理科学 **547** (2008), 46–51.
2) 青木健一：「くりこみ理論入門」，数理科学 **312** (1989), 34–39（別冊数理科学『場の物理と数理―素粒子から物性まで―』(1991)，118–123 に再録）.
3) Gerard 't Hooft: Renormalization and Gauge Invariance, *Prog. Theor. Suppl.* **170** (2013), 56–71.
4) 青木健一：「電磁相互作用のくりこみ理論」，数理科学 **533** (2007), 9–16.
5) 青木健一：「素粒子の 0 電荷問題とその解決―漸近自由理論の発見―」，数理科学 **509** (2005), 37–42.

（あおき・けんいち，金沢大学大学院自然科学研究科）

準粒子

川上　則雄

1. はじめに

私たちが実験などを通して見る粒子は，多くの場合「裸の粒子」そのものではなく何らかの衣をまとっている．粒子をとりまく環境との相互作用で粒子は重くなったり，また時にはその性質の一部だけが現れたりする．このような「**衣を着た粒子**」のことを**準粒子**（quasi-particle）と呼ぶ．また，多くの粒子が集団運動することによっても新しいタイプの粒子が生まれる．これも準粒子と呼ばれることがある．このような準粒子は物理現象のいたるところで見出されるが，量子多体系において特に重要である．興味深いことに，素粒子としては未だ観測が困難なものが，エキゾチック準粒子として量子多体系に現れ，その中のいくつかのものが実測されている．ここでは，量子多体現象の宝庫である凝縮系物理を舞台として，いくつかの典型的な準粒子を眺めてみる．

2. 準粒子と素励起

粒子が周りからの影響を何も受けず単独で運動する場合，粒子本来の性質（例えば質量や素電荷など）が現れるはずである．一方で，物理現象の多くは，多粒子からなる系で生じる．このような多粒子系では，注目している粒子は自分以外の多くの粒子の影響を受けながら運動することになる．このため，準粒子の運動は自由粒子の場合と大きく異なる．これに似た状況は私たちの普段の生活で見かけることがある．例えば，混み合った雑踏をかきわけながら移動するビジネスマン（準粒子）の動きは，広い草原を自由に駆け回る少年ペーター（裸の粒子）のものとは全く異なる．

このように環境の効果を取り込むことにより，粒子は準粒子となる．ここで環境とは，自分以外の他の粒子たちの集団であり，この集団も相手の動きを見ながら時々刻々ダイナミカルに変動する（ビジネスマンを囲む人波のうねりのように）．すなわち，衝突しそうになれば，なるべくぶつからないように自ら運動を調節する．このようなダイナミカルな環境が個々の粒子への「**繰り込み効果**」をもたらし，その結果，裸の粒子に比べ準粒子は重くなったりする．このようにして衣を着た粒子が生み出されるのである．重要な点は，繰り込み効果をいったん取り込めば，準粒子はあたかも自由な粒子のように振る舞うことである．このため，準粒子の概念は量子現象の本質を記述できる強力なものとなる．

上に述べた準粒子は，量子多体論の枠組みでは低エネルギー励起を記述する「**素励起**」（elementary excitation）の一種である．量子多体系では，上述のような一粒子的な素励起（すなわち個別の素励起）の他に，多粒子が互いに協力し合って起こす集団運動がある．この集団運動を量子化して粒子とみなしたものも準粒子と呼ばれている．例えば，結晶格子の揺れによる集団運動はよく知られた音

波に他ならない．この音波を量子化して粒子とみなしたものはフォノンと呼ばれる．また，多電子の集団からの素励起として，プラズマ振動と呼ばれる電荷密度の疎密波が発生する．これがプラズモンと呼ばれる準粒子である．この他に強磁性体からの磁気的な素励起としてのマグノンや，ポーラロン（電子とフォノンの結合），ポラリトン（電子と光の結合），エキシトン（電子・ホールのペア）など多くの準粒子が知られている．ウェブ検索でこれらの準粒子に関するいろいろな情報を参照するのも面白いと思う．

このように準粒子という言葉は，状況によって少し違った意味で使われることがあるので注意が必要である．すなわち，上記の１番目の例のように裸の粒子と区別し衣を着た粒子を指すこともあれば（これが元来の使い方），２番目の例のように，集団励起を量子化した粒子を指すこともある．話の流れや文脈によって，どちらの意味で使われているか判断することはそれほど難しくはないと思う．

3. 衣を着た電子：フェルミ液体に現れる準粒子

前節の１番目の例のような「衣を着た粒子」としての準粒子の典型例から見てみよう．このような準粒子の描像が成功を収めた最も有名な例がランダウの「**フェルミ液体論**」である．これによりフェルミ多体系（電子系やヘリウム３など）の本質的な理解が大きく進んだ．フェルミ液体論は，固体電子論の基礎を与えるシンプルで重要な伝家の宝刀となっている[1,2]．

まず，固体中での多電子の振舞いに焦点を当ててみよう．固体にはたくさんの電子が存在し，互いに相手の行動を見ながら（すなわち相関を持ちながら）量子力学的に運動する．さらに，物質によって一般に相互作用の大きさも違うし，結晶構造も異なるので，固体中の電子の性質を議論するのは厄介な感じがする．気の遠くなりそうな多体問題である．しかしながら物質を低温に冷やし，その低エネルギーの状態に注目してみると，物質

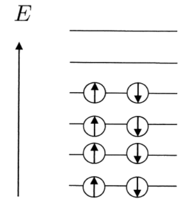


図１　フェルミの海．電子はアップとダウンの２種類のスピンを持つ．それぞれのスピンを持つ電子をエネルギーの低いレベルから詰めていく．一番高いエネルギーがフェルミレベル．この付近の電子が準粒子として振る舞う．

によらない「普遍的な性質」が見えてくるのである．高温の熱ゆらぎで隠れていた電子の本来の性質が出てくる．ここに登場するのが「衣を着た電子」すなわち準粒子である．

電子はフェルミ粒子であり，もともと互いに反発する性質を持っている（フェルミ統計性）．したがって，多電子系の基底状態は，互いに反発する電子をエネルギーが最低になるようにエネルギーの低いレベルから順番につめた状態（**フェルミの海**と呼ばれる）となる．図１に示すようにエネルギーの一番高いところ（海にたとえると海面）を**フェルミレベル**と呼ぶ．固体物理に現れる多様な現象の立役者は「フェルミレベル近傍の相互作用する電子たち」である．というのは，フェルミの海の深さは温度に換算すると数万ケルビンにも達し，抵抗や比熱測定などの実験は高々300ケルビン程度の室温（あるいは，それ以下）で行われるからである．海面あたりの情報が重要であることがイメージできると思う．このフェルミレベル付近の電子は，他の電子からの相互作用の影響により繰り込み効果を受け，その結果として衣を着た準粒子になる（図２）．冒頭で述べた自由なペーターの動きが，都会の雑踏中ではビジネスマン風になってしまうことに似ている．

この衣を着た準粒子が低温の物理を支配する．例えば，有効的な質量が裸の m から繰り込まれた m^* になるものとする．このとき，低温での電子の比熱は m^*/m 倍に増幅される．特に，「**重い電子系**」と呼ばれるセリウム（Ce）やイッテルビ

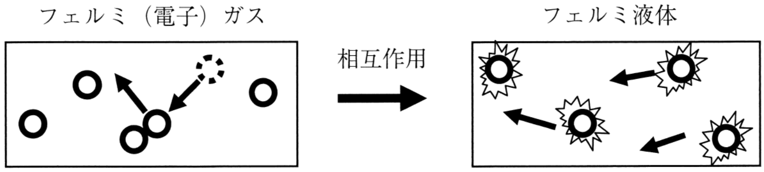


図 2　フェルミ液体における「衣を着た電子」. 繰り込み効果で質量が重くなったりする. 希土類化合物などでは質量が1000倍以上に重くなり, 重い電子と呼ばれる準粒子になる.

ウム（Yb）を含む希土類化合物では m^*/m の比は1000に近い値をとり，アルカリ金属中の電子の1000倍もの質量を持った「重い電子」になる．この重い電子が準粒子に他ならない（図 2）．比熱に限らず，抵抗率などの測定においても，電子の質量 m を繰り込まれた質量 m^* で置き換えれば実験結果の本質が説明できる．また，超伝導を示す物質も，まず低温でフェルミ液体が形成され，そこに現れる「衣を着た電子」がペアを組んで超伝導状態に到達すると解釈できる．

固体物理学では，自由電子の集まりを「フェルミガス」と呼び，衣を着た準粒子の集まりを「フェルミ液体」と呼ぶ慣わしがある．ペーターのような自由な少年たちの「ガス」のような集まりに対して，周りの影響を大きく受けるビジネスマンの動きを想像すれば，「液体」と呼ぶ理由も何となく理解できるのではないだろうか．

ここで強調したい点は，フェルミ液体では電子らしさは相互作用の出現によっても失われないということである．電子は衣を着ても電子なのである．詳細は文献に譲るが[1,2]，このことはフェルミ統計性による拘束が大変強いということと深く関係している．このようにランダウによって提唱されたフェルミ液体論は，相互作用する電子たちの普遍的な性質を記述する枠組みとして確立され，金属に対する多くの実験事実を見事に説明してきた[1,2]．そこで活躍する粒子は，裸の電子ではなく図 2 に示すような「衣を着た電子」としての準粒子である．

4. ホロンとスピノン：1 次元電子系の準粒子

以上のフェルミ液体論は固体電子論で大きな成功を収めてきたが，これは基本的に 3 次元の物質に対して提出された考え方である．衣を着た準粒子として繰り込み効果をうまく取り込むためには，空間次元が高いほうがよいことが知られている．一方で，空間次元が 2 次元，1 次元と下がってくると，**量子ゆらぎ**の効果がどんどん大きくなり，フェルミ液体の概念は安心して使えなくなる．すなわち，空間次元が低い場合は，ある電子が他の電子中を運動する際，まわりの電子からの大きな量子ゆらぎの影響を受けて衣を着た準粒子の性質を保つことが難しくなってくるのである．

特に，空間的に 1 次元方向のみに粒子が運動できる 1 次元物質ではランダウのフェルミ液体論は完全に破綻し，これに代わって「**朝永・ラッティンジャー液体**」と呼ばれる概念が登場する[3~5]．この呼び方は，1950 年の朝永振一郎[6]による 1 次元電子系に関する先駆的な研究，ならびにそれに続く J.M. Luttinger[7]の仕事にちなむものである．フェルミ液体の破綻が意味するところは，電子をフェルミレベル付近にそっと付け加えても有限の寿命でフェルミ粒子としての本質を失ってしまうということである．

このような 1 次元電子系は古くは数理物理のテーマとして研究されてきたが，最近では多くの物理系で実験的に実現されている[3~5]．人工的な 1 次元の典型例として，半導体のヘテロ構造 GaAs/AlGaAs に作成された 2 次元電子系に，さらにポイントコンタクトと呼ばれる加工を施した**量子細**

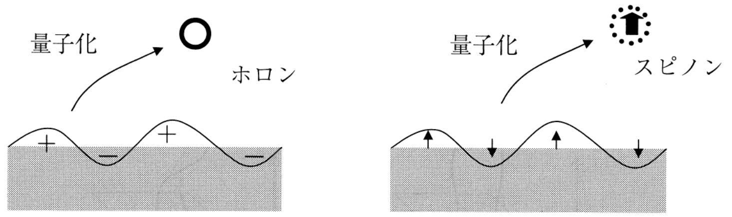


図3 ホロン（スピノン）は電荷（スピン）密度ゆらぎが量子化された準粒子である．

線がある（2次元電子系については，以下のエニオンの項目を参照のこと）．さらに最近では，**レーザー冷却原子**でも1次元的な系が実現されるなど，1次元系は量子現象の最先端研究に確固とした研究舞台を提供している．

ところで，1次元電子系で衣を着た電子の考え方が破綻しているとなれば，これに代わる準粒子とはどのようなものだろうか．もともと電子は電荷とスピンをもつ粒子として導入されているが，1次元の低エネルギー励起としては，スピンを担う励起と，電荷を担う励起が独立に準粒子として振る舞う．いわば，電子がスピンを担う部分と電荷を担う部分に分離してしまったように見える（図3）．対応する準粒子は，それぞれ**スピノン**，**ホロン**と呼ばれている[3,4]．

もちろん，このような現象は単独でいる電子では起こらない．これらは，フェルミ多粒子系の基底状態から電荷とスピンの波がそれぞれ生成され，これを粒子として量子化したものである．1950年に朝永によって先駆的に導入された「フェルミ粒子たちの集団運動」に他ならない[6]．

このように，電子に代わってスピンと電荷励起のモードが分離してよい量子状態を作ることは「**スピンと電荷の分離**」と呼ばれ，フェルミ液体には現れなかった1次元電子系の大きな特徴である[4]．実験的にもスピノンとホロンは光電子分光の実験などで既に観測されている．

5. エニオン：分数統計粒子

スピノン，ホロンは十分に魅力的な準粒子であると思うが，よりエキゾチックな準粒子が低次元の電子系では見出されている．その一つが**エニオン**である[8]．量子統計力学によると，2粒子の入れ替えに対して波動関数の符合が変わるもの（変わらないもの）がフェルミオン（ボゾン）である．すなわち，2粒子の状態を $|\psi_1\psi_2\rangle$ と書くことにすると，粒子の入れ替えに対して

$$|\psi_1\psi_2\rangle = \pm|\psi_2\psi_1\rangle$$

となる．これは，2粒子の入れ替えを続けて2回行うと粒子の状態は元に戻るべし，という要請から自然に帰結される．しかしながら，このことが成立するのは空間次元が3以上の場合である．例えば，空間2次元では粒子の2回の入れ替えで状態が必ずしももとに戻る必要はない．この場合，粒子の入れ替えに付随する波動関数の位相変化は

$$|\psi_1\psi_2\rangle = \mathrm{e}^{i\theta}|\psi_2\psi_1\rangle$$

と，$\mathrm{e}^{i\theta}$ の因子で与えられる．ただし，θ は任意の値をとり得る．ちなみに $\theta = 0, \pi$ がボーズ，フェルミに対応している．したがって，2次元系においては，フェルミ統計およびボーズ統計の間をつなぐような粒子を観測できる可能性がある．これに対応する粒子はエニオンと呼ばれている（anyon: F. Wilczek により命名[8]）．図4に，2次元エニオンの時間発展の様子を示した．このときの粒子の入れ替えの性質は，代数的には組ひも群で記述される．エニオンは通常のフェルミオン，ボゾンといくつかの点で本質的に異なる．まず，フェルミ統計とボーズ統計の中間に位置する「**分数統計**」に従う．さらに，その電荷は素電荷 e よりも小さい「**分数電荷**」を持ち得る．何ともエキゾチックな粒子である．

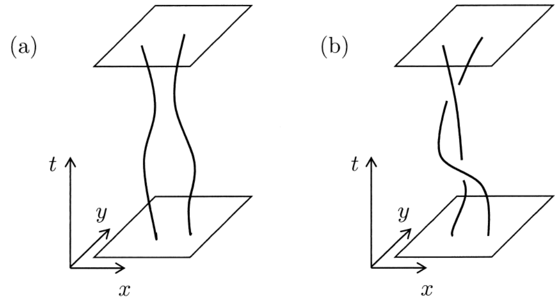


図4 2次元空間における2粒子の時間発展．(a) と (b) では，同じ場所に戻ったとき波動関数の位相が $e^{2i\theta}$ だけ異なっている．

ここで注意したいことは，エニオンという「素粒子」は未だ実験的に観測されていないということである．ここに，凝縮系物理の「準粒子」という概念が威力を発揮する．すなわち準粒子としてのエニオンが固体電子系で実現され，観測されているのである．

このエニオンの観測舞台となったのは強磁場中の2次元電子系である．これは固体物理の技術を駆使して作成された理想的な量子系であり，例えばGaAs/AlGaAsなどの原子レベルで構造が類似した2つの物質を接合させたヘテロ接合面で実現される．この接合面近くにはポテンシャルの低い部分ができ，ここに電子が束縛される．したがって，界面に垂直方向の電子の動きが制限され，2次元電子系が作製されることになる．

このような2次元の電子系に強い磁場をかけたとき，ホール伝導率が量子化された値をとる現象は**量子ホール効果**として知られている[5)]．ちなみに量子ホール効果は，通常の抵抗測定などとは異なり，電場，磁場，電流をそれぞれ垂直に配置した場合の，電流電圧特性に現れる．このような量子ホール系におけるホール伝導率 σ_{xy} は

$$\sigma_{xy} = \nu \frac{e^2}{h}$$

と $\frac{e^2}{h}$ を単位として量子化される．ここで $\nu = 1, 2, 3, \cdots$ の場合，整数量子ホール効果と呼ばれる．その量子化は何と 10^{-8} の精度で起こり，この効果は標準抵抗としても利用されている．一方，$\nu = 1/3, 1/5, 1/7, \cdots$ などの分数の場合は，分数量子ホール効果と呼ばれ，これには電子間の相互作用が本質的である[9, 10)]．2次元性，磁場効果，相互作用効果があいまって，通常の電子系とは全く異なるエキゾチックな基底状態が実現しているのである．エニオンはこのエキゾチックな基底状態を反映する素励起，すなわち準粒子として現れる．このように半導体ヘテロ構造での分数量子ホール系の輸送現象に関する実験で，$e/3$, $e/5$ などの分数電荷を持つ準粒子としてエニオンが観測された[11〜13)]．

ここで，前節の1次元系と本節の2次元系の密接な関係について一つコメントしておく．2次元の分数量子ホール効果を有限の大きさを持つ物質で考えると必然的に境界（エッジ）ができる．このエッジにおいては，エニオンの運動は1次元方向に制限される．この1次元の物理を記述するのは，上に述べた朝永・ラッティンジャー液体に他ならない．2次元における量子ホール系と1次元の朝永・ラッティンジャー液体のこのような密接な結びつきは「**バルク・エッジ対応**」と呼ばれる普遍的な対応関係の一例となっている[5)]．

6. マヨラナ粒子と非アーベル統計

さらにエキゾチックな準粒子として，研究者の熱い視線を集めているのが**マヨラナ粒子**である．マヨラナ粒子は，電子などと同じくスピンが半整数の値をとるフェルミ粒子の一種であるが，電子と違って電気的に中性である．マヨラナ・フェルミオンと呼ばれることもある．マヨラナ粒子は「粒

子と反粒子が同一」となる奇妙な粒子である．これは，イタリアの E. Majorana[14] が存在を予想したものであるが，素粒子としてこれまで観測された例はない．例えば，ニュートリノがマヨラナ粒子かどうかは未だに素粒子物理学の大きな問題である．以下に述べるように，この粒子が凝縮系物理で観測される可能性が出てきている[15]．

まず，マヨラナ粒子の性質を演算子を用いて確認しておく．マヨラナ粒子では，「粒子と反粒子が同一」のため生成演算子と消滅演算子が同一である．すなわち，位置 j におけるマヨラナ粒子の生成（消滅）演算子を $\gamma_j^\dagger$（γ_j）とすると

$$\gamma_j^\dagger = \gamma_j \tag{1}$$

が成立する．マヨラナ粒子は通常のフェルミオンの実部あるいは虚部のみで構成されるとみなすことができる．例えば，$c_j^\dagger$，c_j を通常のフェルミオンの生成・消滅演算子とすると，$\gamma_j = c_j^\dagger + c_j$ と表すことができる．そしてフェルミオンの演算子 $c_j^\dagger$ と c_j の反交換関係から

$$\gamma_i^2 = 1 \tag{2}$$

であることがわかる．また，異なるマヨラナ粒子は反交換関係をもつ（フェルミオン）．すなわち

$$\gamma_i\gamma_j = -\gamma_j\gamma_i \quad (i \neq j). \tag{3}$$

最近，凝縮系物理において「準粒子」としてのマヨラナ粒子の観測可能性が急浮上してきており，大きな話題となっている[15]．この研究舞台となっているのが，「**トポロジカル超伝導**」[16] と呼ばれる非従来型のエキゾチック超伝導である．トポロジカル超伝導においては，その超伝導波動関数の持つトポロジカルな性質に起因して，エッジ状態にマヨラナ準粒子が現れる．このあたりの理論に関しては，分かりやすい邦語の解説が出ているので参照していただきたい[17]．

トポロジカル超伝導（あるいは超流動）に関しては，^{3}He 超流動[18] や Sr_2RuO_4 超伝導[19] などを含め，いくつか候補の物質が実験的に見つかっている[15,16]．しかしながらマヨラナ粒子の発現が確

認されるには至っていない．

最近，1次元のトポロジカル超伝導系でマヨラナ粒子が観測されたとの実験報告がいくつかあり，大きな反響を呼んでいる[20~22]．これに関して提案されているのは，超伝導/量子細線ハイブリッド系である．例として，InSbで作られた量子細線とNbの超伝導体で構成される系を見てみよう[21]．まず，Nbの超伝導による近接効果を用いてInSbの量子細線を超伝導化する．InSbに内在する強いスピン・軌道相互作用を利用し，さらに外部磁場をうまく調整することで，トポロジカル超伝導が実現する条件を作ることができる．このような1次元系で，マヨラナ粒子の存在を示す現象が，トンネル効果やac（交流）ジョセフソン効果等で検出されたと報告されている[20~22]．ただし，実験結果が必ずしもすべてうまく説明されているわけではなく，解決すべき課題も残されている．多くの研究者がさらなる実験をワクワクしながら待っている状況である．

もし凝縮系においてマヨラナ粒子の発現が確認されれば，これはエキゾチック粒子の初めての観測ということに留まらず，「**非アーベル統計粒子**の実現」という観点からも極めて面白い．前節でふれたエニオンも含め，通常の粒子は2粒子入れ替えに対して可換である．すなわち，粒子交換は波動関数の位相因子の変化のみで記述される（アーベル統計）．一方で，粒子の入れ替え操作が，組ひも群の高次元表現で記述される場合は，入れ替え操作が非可換（非アーベル）になる．このような統計に従う粒子は非アーベル統計粒子と呼ばれる[4,15,16]．非アーベル統計に従う粒子は基礎物理として十分面白いものであるが，さらにこれは量子ビットの優れた構成要素となることが理論的に提案され，デバイス応用の観点からも魅力的な粒子となっている．非アーベル統計粒子に付加された情報は外界の影響を受けにくく安定であるからである．マヨラナ粒子がどのように非アーベル統計を実現するかに関しては，文献を参照していただきたい[4,15,16]．

7. おわりに

ランダウのフェルミ液体に出てくる準粒子は，繰り込み効果で定量的な変化は受けるもののフェルミ粒子本来の性質は失わない．一方で，1次元電子系に現れるスピノン，ホロンは低次元ゆらぎのためフェルミ統計性が有効でなくなり，集団励起としての電荷とスピンの素励起が量子化されたものである．これらが本来の粒子である電子の代わりに準粒子の役割を担う．量子ホール系で観測されたエニオンは，低次元性のため分数統計，分数電荷などのエキゾチックな性質を持つ．さらに神秘的ともいえるマヨラナ準粒子は，トポロジカル超伝導系を舞台としてその観測に向けて努力が続けられている．わくわくするような実験が現在進行形で進んでいる．

ここでは紹介しきれなかった準粒子たちが他にもたくさんいる．例えば，原子核理論で最初提案された「**スキルミオン**」あるいは「**スカーミオン**」をウェブ検索してみると，最近の凝縮系物理における著しい発展に驚かれる読者も多いことと思う．

このように凝縮系物理は準粒子の宝庫となっている．準粒子には，本来の粒子の性質を引き継ぐものや，全く新しいものに化けてしまうエキゾチックなものもある．特にエキゾチック準粒子を生み出す源は，準粒子のバックグランドとなっている「量子凝縮相」の非自明な性質である．このように考えると，準粒子は量子凝縮相の自明・非自明な性質を私たちに伝えてくれる使者のようにも思える．

準粒子は多体系が生み出す，何ともいえず魅力的な粒子である．その存在を予言したり実証したりすることは，物理学の営みの中で最も面白い部分であろう．準粒子は，自然界における存在とは何？と考えさせてくれる格好の題材ではなかろうか．夢は膨らむばかりである．

参考文献

1) 山田耕作：『電子相関』，岩波書店（2000）．
2) 斯波弘行：『電子相関の物理』，岩波書店（2001）．
3) 川上則雄：『1次元電子系の数理』，岩波書店（2002）．
4) 藤本聡，川上則雄：『量子多体系の物理』，サイエンス

社（2011）．
5) A. Altland and B. Simon, *Condensed Matter Field Theory*, Cambridge University Press (2nd edition: 2010); 邦訳（新井正雄他）『凝縮系物理における場の理論』，吉岡書店（第 2 版：（上，下）2012）．
6) S. Tomonaga, *Prog. Theor. Phys.* **5**, 544 (1950).
7) J.M. Luttinger, *J. Math. Phys.* **4**, 1154 (1963).
8) F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 957 (1982).
9) D.C. Tsui, H.L. Stormer, and A.C. Gossard, *Phys. Rev. Lett.* **8**, 1559 (1982).
10) R.B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1395 (1983).
11) V.J. Goldman and B. Su, *Science* **267**, 1010 (1995).
12) B.I. Halperin, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1583 (1984); D. Arovas, J.R. Schrieffer, and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 722 (1984).
13) F.E. Camino, Wei Zhou, and V.J. Goldman, *Phys. Rev. B* **72**, 075342 (2005).
14) E. Majorana, *Nuovo Cimento* **14**, 171 (1937).
15) レビューとして：J. Alicea, *Rep. Prog. Phys.* **75**, 076501 (2012).
16) レビューとして：X.L. Qi and S.C. Zhang, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 1057 (2011); 佐藤昌利，柏谷聡，前野悦輝，トポロジカル超伝導現象，固体物理 **46**, 479 (2011).
17) 佐藤昌利，トポロジカル超伝導体入門，物性研究 **94**, 311 (2010).
18) G.E. Volovik, *The Universe in a Helium Droplet*, Oxford University Press (2003).
19) 最近のレビュー：Y. Maeno, *et al.*, *J. Phys. Soc. Jpn.* **81**, 011009 (2012).
20) V. Mourik, K. Zuo, S.M. Frolov, S.R. Plissard, E.P.A.M. Bakkers, L.P. Kouwenhoven, *Science* **336**, 1007 (2012).
21) L.P. Rokhinson, X. Liu and J.K. Furdyna, *Nature Physics* **8**, 795 (2012).
22) A. Das, Y. Ronen, Y. Most, Y. Oreg, M. Heiblum and H. Shtrikman, *Nature Physics* **8**, 887 (2012).

（かわかみ・のりお，京都大学大学院理学研究科）

確率と存在

世界を切り分ける方法こそが重要である

伊庭　幸人

■　1. はじめに：確率の背後にあるもの　■

数学の世界で「確率」というと（基礎となる事象の空間，確率の定義される部分集合の全体，確率の値の割り当て）の 3 つ組を定めることから話がはじまる．ここで大切なのは，確率の値の割り当てだけでなく，その背後にある事象の設定まで含めて，はじめて確率の世界が意味を持つということだろう．実世界で確率の考えを使いこなすには，狭義の数学の枠には収まらない考え方や技術が必要になるが，そこでも，確率の値の背後にある「世界の切り分け方・記述の仕方」が重要な点は同じである．

本稿の前半では，特に物理にこだわらずに，簡単な例を通じてそのことを確認してみたい．最初に「確率の値を頻度にもとづいて定義する」という考え方をとりあげる．これはとても客観的に思えるが，実はそれは背後にある世界が適切に切り分けられていることが前提となっていることがわかる．

受験数学の「確率」では，ある集合の要素（くじ引きの結果とかサイコロの出目とか）が等確率であるという仮定から出発する．これは実世界にも応用できそうに思えるが，連続変数の場合を考えるとたちまち悩ましいことにぶつかる．ここでもまた，背後に隠れている「記述の仕方」が本質的なのである．

具体例について「なぜ等確率と考えるか」を反省してみることも時には必要だろう．本稿ではサイコロについてこれを考えてみる．この話は後半への伏線にもなっている．

後半では物理の話をする[*1)]．物理における確率というと量子力学と統計力学があるが，ここでは主に統計力学のほうを論じる．ここで主張したいことは，平衡統計力学の確率には世間一般における確率とはかなり違う基礎付けがあるということである．それはいわゆる「等確率の原理」が特別な役割を果たすからである．

これとは別に，統計力学を現実に適用しようとすると，対象の構造をどこまで精細に記述すべきかという問題が起きる．これは歴史的に量子力学が生まれたきっかけでもあったが，最後にその話にも触れておきたい．

物理学はそれ自体が「世界の記述の仕方」を内在的に決めている．また，理論の予測結果が記述法の細部によらないようにうまく作られている．これらが相まって物理学の客観性を担保しているが，いっぽうで物理学者はそれが物理の外でも通用すると思いがちである．本稿が，物理を外から眺められる立場を生かして，新鮮な視点を提供できれば幸いである．

■　2. 頻度　■

連続値のデータを適当な小区間に区切ってそこに属する頻度を数えたものを**ヒストグラム**という．「確率の値は事象の頻度から経験的に定めるべき」と考えたとき，いちばん最初に試みるのが，データからヒストグラムを描くことだろう．

しかし，これは思うほど自明な作業ではない．図 1 をみてほしい．これは同じデータを 4 種類の区切り方でヒストグラムにしたものである．左上のように全部いっしょくたにしたものはデータに含まれる情報の多くを失っていて，確率の計算に役立たない．これはまあ当然だろう．

ところが，細かく分ければよいというものではない．極端な話，右下のように細かく切り過ぎるとほとんどの小区間に 0 個か 1 個のデータしかなくなってしま

*1)　後半の内容，とくに最後の 10 節は，前著『ベイズ統計と統計物理』[1)]の 4.7 節の議論を展開したものになっている．

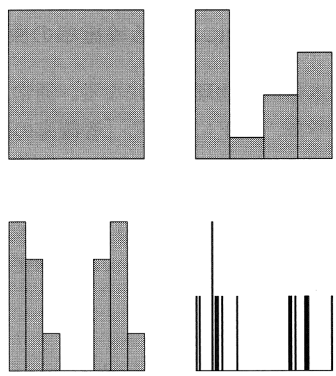


図 1　同じデータに対する区切りの数の違うヒストグラム（最大高さを揃えてある）.

う．こういうヒストグラムをレポートに載せると先生に怒られることになる．細かすぎるヒストグラムはすべての情報を持っているという意味ではベストなはずだが，データの様子を探るのにも，未来を予測するのにも有用ではないのである．

「同一条件」でのデータが無制限に手に入ることを前提にすれば，どんなに細かく切ったヒストグラムでも，それぞれの小区間に入るデータの全体に対する割合は任意の精度で一定の値に収束することが期待できる．しかし現実の世界では，データ数は有限であり，さらに，データ数が増えるとより細かい構造が知りたくなるという状況が普通である．「頻度の比の極限が確率」というのはもっともであるが，その背後にある「世界の切り分け方」の重要性を見逃してはならない．

ここからが佳境であって，ヒストグラムの話を枕にして，統計学とは何か，機械学習とは何か，を語り明かすこともできる．しかし，今日は別の方面に遠征する予定で，まだ先が長い．この先の展開は以前書いた解説[2,3]や統計的機械学習の標準的なテキスト[4]に譲ることにしよう．

■ 3. 等確率 ■

中学や高校の授業では「サイコロの 1 から 6 の目が出る確率はすべて 1/6 とする」「それぞれのクジが出る確率は同じとする」のように，ある集合の要素に等しい確率の値を割り当てることから出発するのが普通だった．この考え方は，大人の世界でも荒っぽい仮定として使えるかもしれないが，連続量の確率になると自明でないことが生じる．

x という変数の値がある区間で一様に分布するとしよう．このとき，x を関数 f で変数変換した $\tilde{x} = f(x)$ の分布はもはや一様ではない．たとえば，区間 $[0, 1]$ で $f(x) = x^3$ とした場合を図 2 に示した．数式で計算するには，変換関数の局所的な傾きの絶対値で割ればよい．いまの場合だと，$\tilde{x}$ の密度は $|1/f'(x)| = 1/|3x^2| = 1/|3\tilde{x}^{2/3}|$ に比例する値をとることになる．n 次元になると一般にはヤコビ行列式が必要になるが，各変数 x_i を別々に同じ関数 f で変換するなら，単に積 $\prod_{i=1}^{n} |f'(x_i)|$ で割ることに帰着する．

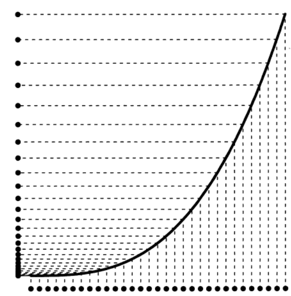


図 2　$\tilde{x} = x^3$ で変換したときの分布の変化.

いずれにせよ，基準となる変数を指定しないと，等確率の意味が定まらないことになる．ここでも「基準となる変数の選び方」という確率の数字の背後にあるものが本質的なのである．

ところで，離散量の場合には等確率の定義に問題がないというのは本当だろうか．実は隠れているだけだと思う．たとえば，ランダムな文章を作るのに，「ランダムに文字を選ぶ」のと「ランダムに単語を選ぶ」のとではまったく違った結果になる．また，調査の回答者を選ぶのに「人間をランダムに選ぶ」のと「世帯をランダムに選んでそこからランダムにひとり選ぶ」のは同じではない．「数式で変数変換する」というわかりやすい形ではないが，世界がどういう要素でできていると考えるかによって，等確率が何を意味するかは異なる．

昔，フランスの軍人さんが「フランス語のすぐれたところは語順が人間がものを考える順番の通りに並んでいることだ」といったそうだ．もしこの人がドイツ人なら同じ理由でドイツ語を賞賛しただろう．自分の浸っている「世界の切り分け方」に疑問を持つためには，世界を外部から眺める能力が必要なのだ．その意味で，確率について考えることは自分の足元を見直すことでもある．

■ 4. サイコロ問答 ■

サイコロ（図 3）の 6 つの目が等しい確率で出ると考える理由は何だろう．ひねくれた人なら「目がほぼ等確率で出るものでないとサイコロとは呼ばない．商品として売れない」と答えるかもしれない．それもよいが，いちばん普通と思われる答は，**[A] 正 6 面体の対称性から各面が対等だから**，だろう．



図 3　サイコロ娘.

もっともだが，文句をつけようとすればいくらでも可能である．普通に振るかわりに掌を静かに傾けてぽとりと床に落としたら，また床が衝撃を吸収する材料で覆われていたなら，最初の向きと出る目は独立にはならないかもしれない．極端な話，1 の目が上に向いているサイコロをそーっと床に降ろしたら，対称性がどうだろうと 1 の目のままである．

そこで，これを補完するもうひとつの「理由」は，**[B] サイコロの転がる運動が不安定でわずかの初期値の差で違う目が出るから**，ということになる．[A] が簡単明瞭なのに対し，[B] は複雑微妙である．不安定性は床との衝突によってもたらされる部分が大きいと思われるが，正確な様子は床の表面の材質やサイコロの材料などに敏感に依存する．また手の平で転がすことや投げるフォームだって関係しているかもしれない．

最後にもうひとつ．精度の高いサイコロが 1 万個くらいあるとして，それらを一斉にそれぞれ独立に振れば，各々の目が 1/6 に極めて近い割合で出るだろう．いわゆる「大数の法則」のあらわれであるが，もちろんサイコロが沢山あるから等確率になったわけではない．むしろ，沢山あるために 1 回の観測で等確率性が厳格に検証できるというのが正しい．

■ 5. 統計力学における等確率の原理 ■

ここから本格的に物理の話になる．通常，古典系の平衡統計力学は，以下に述べる**「等確率の原理」**から出発する*2)．

> n 個の粒子からなる物理系の状態を各粒子の位置と運動量の組 $\{(x_i, p_i)\}, i = 1 \ldots n$ で指定すると，系の状態は
>
> $$(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$$
>
> を座標とする高次元空間の 1 点であらわすことができる*3)．このとき，エネルギーが E と $E + \delta E$ の間にあるとすると，その間にある状態（図 4 左の色を塗った部分）が一様な確率で実現する．

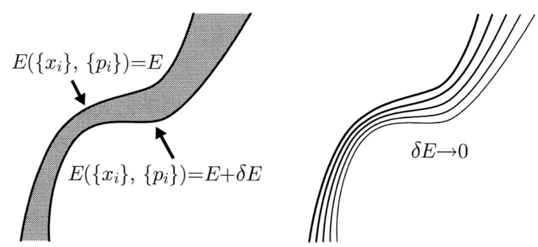


図 4　等確率の原理.

基本は $\{(x_i, p_i)\}$ の高次元空間で一様に分布するということで，それを「等確率」と称している．ただし，外部とエネルギーのやりとりのない系（孤立系）を考えているので，保存則から E が一定という制約があり，それを考慮しているわけである*4)．

---

*2)「等確率の仮定」という呼び方のほうがふさわしいかもしれない．また**「等重率の原理」**ともいう．「平衡」の一般的定義はここではしないが，以下に限れば「エネルギーのやりとりのない状態で充分長時間放置した後」という意味である．

*3) 構造のない粒子の集まり（単原子気体）では，座標 x_i も運動量 p_i も 3 次元ベクトルなので，考える空間の次元は $2 \times 3 \times n = 6n$ となり，上のベクトルはそれらをずらりと並べたものである．以下の解説では座標軸の 3 つの方向をあらわす添字は省略するが，7 節以外では同じ形の式が 3 つずつあると思ってほしい．構造のある場合は，とりあえずは構造のない粒子に分解して表現することにしよう．

*4) 孤立系を考えているはずなのに，エネルギーに δE の幅がついているのは変な気がするが，その意味は以下の通り．δE を小さくすると，$\{(x_i, p_i)\}$ 空間での 2 枚の曲面の間隔は各場所での比率を保ったまま狭くなる（図 4 右）．そこで，$\delta E \to 0$ の極限でも，曲面の間隔の場所による違いが，エネルギーが一定の曲面上の相対的な重みとして残る．「そんな重みはいらん」と思うかもしれないが，後で触れる力学との整合性のためには必要である．朝永[5)]の付録も参照．

6. 大数の法則と統計力学

さて「統計力学は**大数の法則**から出てくるので，等確率の原理はいらない」と信じている人がときたまいる．それも内容しだいだが，極端に単純な議論は明らかに間違いである．

問題の議論とは次のようなものである（以下にはひとつだけ正しくない推論が含まれている）．

まず，多数の粒子からなる系を考える．多くの場合，それはほとんど独立の部分が数多く集まってできていると考えてよいだろう．すると，独立な各部分で定義された量の平均値について，確率論の「大数の法則」が適用できる．たとえば，n を多数の粒子の個数，f を任意の関数として，

$$A=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i,p_i)$$

のような形をした量は，$\{(x_i,p_i)\}$ の大部分の実現値について，ほぼ一定の値を取る．4 節で述べた「沢山のサイコロを同時に振る話」と同じ原理である．図解すると図 5 のようになる[*5]．

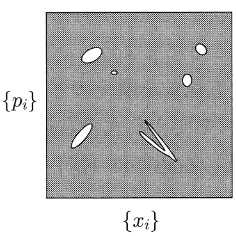


図 5　大数の法則．灰色に塗った部分が物理量 A が一様分布での期待値にほぼ等しい領域．「例外」となる領域を示す白い穴の体積の比率は高次元では極めて微小になる．図の横軸・縦軸はそれぞれが高次元の $\{x_i\}$ と $\{p_i\}$ に対応するつもり．この図およびあとの図ではエネルギーの制約条件は省略した．

さて，A のような量は，考えている領域の大部分の場所で，ほぼ一定の値を取るのであるから，いうまでもなく，その値は考えている領域で一様分布を仮定したときの A の期待値に等しい．そして，それは—「大部分の場所」での値なのだから—実験で測定される値とも一致するだろう．すなわち，大数の法則に従う量を考えている限り，等確率の原理を用いなくても，等確率の原理を仮定した統計力学の予言はすべて導出できることになる！

*5）この図が高次元空間での状況を正しく表現しているかどうかはちょっと怪しいが．

7. どこがまずいか

この議論の決定的に残念な点は，$\{(x_i,p_i)\}$ のかわりに別の変数の組を取っても，まったく同じ論法が使えてしまうことにある．たとえば，$\tilde{x}_i=x_i^3$ と変数変換し，p_i はそのまま使って，$\{(\tilde{x}_i,p_i)\}$ で状態を指定することにしても，同じ議論ができる．したがって，$\{(\tilde{x}_i,p_i)\}$ について等確率を仮定しても，$\{(x_i,p_i)\}$ について等確率を仮定しても，どちらも実験と一致する結果になりそうである．

ところが，このふたつの結果は同じにはならない．3 節で議論した通り，ある変数の組について一様に分布するとした場合と変数変換したあとの変数の組について一様に分布するとした場合で，結果は違うのである[*6]．$\tilde{x}_i=x_i^3$ の場合でいえば，ふたつの世界の「等確率」は，変数変換のヤコビ行列式に対応する $1/\prod_{i=1}^{n}|3\tilde{x}_i{}^{2/3}|$ という因子の分だけずれる．この違いはマクロな物理量の期待値に変化をもたらし，異なった実験結果を予言する．いまの場合，正しいのは $\{(x_i,p_i)\}$ での一様分布から出発したほうである．

なんだか不思議な気がするが，種明しをすると「$\{(x_i,p_i)\}$ の空間の大部分で A が取る値 a」と「$\{(\tilde{x}_i,p_i)\}$ の空間の大部分で A が取る値 b」は同じではないのである．先の具体例でいえば，1 次元空間の変換 $\tilde{x}=x^3$ では，x の広い領域が $\tilde{x}\simeq 0$ の領域に押し込まれる（図 2）．n 次元の変換 $\tilde{x}_i=x_i^3$ でも同じであるが，押し縮められる率を体積の比ではかると，n が大きくなるにつれて指数関数的に大きくなる[*7]．$\{(x_i,p_i)\}$ の世界で体積の大部分を占めている $A\simeq a$ となる領域は，$\{(\tilde{x}_i,p_i)\}$ の世界では極めて小さい範囲に押し込まれてしまって，かわりに $A\simeq b$ となる領域が大半を占めることになる．

前節の議論に数学的な誤りはない．落とし穴は「大

*6）例外的に状態空間の体積を変えない変換（ヤコビ行列式の絶対値が 1 になる変換）は同じ結果を与える．正準変換（シンプレクティック変換）といわれるものはその真部分集合で，力学では重要な役割を演じる．これらの場合，x_i を変えたら，あわせて p_i も変えなければならない．

*7）たとえば，ひとつの軸で 0.9 倍とすると，各軸が独立で次元が 1000 の場合の体積比は $(0.9)^{1000}=1.7\times10^{-46}$ となる．いま考えている変換は $\tilde{x}=0$ で特異だが，それは本質的ではなく，もっと穏やかな変換でも次元が高ければ同じである．

部分」という言葉に騙されて「それが実験で測定される値になる」と思ってしまったことにある．「考えている領域の大部分で成り立つ」といっても，高次元の場合，どの変数の空間で「大部分」かで話が全然違うので，なぜその変数を選ぶかという議論なしには意味がないのである*8)．

大数の法則による議論がまったく無意味だといっているわけではないことを注意しておく．変数の空間を特定した上であれば「時間平均をとらなくても一回の観測でほぼ確定した結果が得られる」というのは魅力的な性質である．また，別の仕方で大数の法則を適用する研究までも否定しているわけではない*9)．あくまでも，ここの趣旨は「仮定の吟味が重要であって，そこを怠ると気づかないうちに論点を先取りしてしまう」ということである．

8. 力学の役割

$\{(x_i, p_i)\}$ の等確率なら良くて，$\{(\tilde{x}_i, p_i)\}$ の等確率は駄目らしい．一体その違いは何だろうか？

いままでの話では，粒子の個数が多いという以外，物理学特有の性質は使っていなかった．ここで，粒子たちが相互に力を及ぼし合いながら，ニュートン力学の運動方程式に従って動くと考えてみよう．

われわれは n 個の粒子をまとめて高次元の空間の1点（以下「超粒子」という）であらわしたので，粒子たちが動くと，その点が動く*10)．高次元空間の「一様分布」がどう変化するか調べるには，多数の超粒子を一様に空間にばらまいて，それぞれを独立に運動方程式によって動かし，その分布の変化をみればよい．

するとどうだろう，$\{(x_i, p_i)\}$ 空間での一様分布は保たれる（図6左）のに対し，$\{(\tilde{x}_i, p_i)\}$ の一様分布は崩れて，超粒子たちの大多数は微小な体積の部分集合の中に寄り集まってしまう（図6右）*11)．

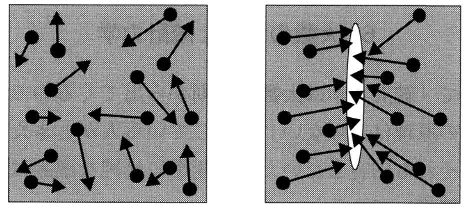


図6　運動方程式に従って分布を変化させた様子．白い部分が大数の法則で「例外となる領域」のつもり．

$\{(x_i, p_i)\}$ 空間での一様分布がニュートンの運動方程式によって時間発展させても保たれるのはなぜだろう．いちばん簡単なタイプの運動方程式は，U を $\{x_i\}$ のみに依存する関数としたときに

$$m\frac{d^2x_i}{dt^2} = -\frac{\partial U(\{x_i\})}{\partial x_i}$$

と書けるが，これについてだけなら簡単に理解できる*12)．通常の通り，運動量を $p_i = m(dx_i/dt)$ で定義すると，上の式は

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{p_i}{m}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial U(\{x_i\})}{\partial x_i}$$

となる．ここで，微小な時間刻み ϵ を取り，最初の式の組と次の式の組を交互に実行して，$\{x_i\}$ と $\{p_i\}$ を時間発展させることにしよう．ϵ を充分小さくすれば，結果は上の微分方程式を解くのと近似的に等しい．ポイントは「$\{x_i\}$ を変える式の右辺には $\{x_i\}$ が無く，$\{p_i\}$ を変える式の右辺には $\{p_i\}$ が無い」(∗) ことである．

以下，簡単のため $n = 1$ の場合で説明しよう．この場合，最初の式の組と次の式の組による領域の変換の様子はそれぞれ図7の左と右のようになる．(∗) から，隣接する矢印の長さは同じになり，細かく分割した各部分（たとえば濃い色で塗った一片）の面積がそれぞれ保存する．これから，領域全体の面積の保存，すなわち超粒子密度の保存がいえる．

---

*8)　粒子数 n が大きく，考えている空間の次元が高い，ということが，変数変換で大きな違いが出る原因であるが，それは「大数の法則」が適用できることと表裏一体の関係にあって，いっぽうだけを考えるわけにはいかないのである．

*9)　量子力学を前提として，等確率の原理に相当することをもっとゆるい前提から導くという研究は，最近でもいろいろ行われているようである．

*10)　3次元空間の n 個の粒子の運動と高次元空間（状態空間，相空間）の1個の超粒子（代表点）の運動が1対1に対応している．

*11)　図6も高次元の現象を無理に表現しようとしているためにミスリードな面があるかもしれない．高次元では，2次元に射影した分布が僅かにゆがむだけで，分布全体はもとの分布と大きくずれてしまう．したがって「微小な穴に超粒子たちが突入していく」というイメージはちょっと違うかもしれない．また，簡単な例で試してみるとわかるが，実際にはこの図のように一方向的に動くのではなく，反対の方向に行く超粒子もいて，それらも含めた全体としてムラができる．

*12)　曲線座標を使う場合や磁場がある系の場合には，p_i をうまく定義した上で，x_i や p_i が絡み合う場合を扱う一般論が必要である（リウビルの定理）．解析力学や統計力学の本のハミルトン形式の力学の項を参照されたい．いまの場合には，リウビルの定理の証明で打ち消し合う項がそもそも存在しないので簡単になる．

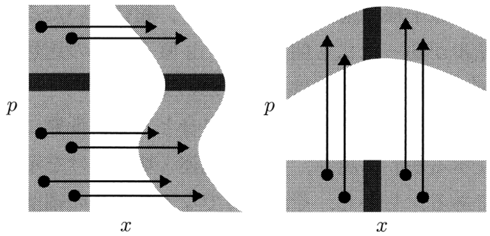


図7　体積保存の証明．$n=1$ の場合（面積保存）の場合を図示した．

$\tilde{x}_i = x_i^3$ として，p_i はそのままで，$\{\tilde{x}_i\}$ と $\{p_i\}$ を使って運動方程式をあらわすと，こんどは $\tilde{x}_i$ を変える式の右辺に $\tilde{x}_i$ が出てくるようになる．だからただちに体積が保存しないとはいえないが，上の議論がそのまま適用できないことはわかる．

■　9. 力学から等確率の原理は導かれない　■

さて，それではニュートン力学から等確率の原理が導けるのかというと，残念ながらそう簡単にはいかない．$\{(x_i, p_i)\}$ 空間での一様分布は確かに不変なのだが，逆に不変なものがそれだけだとはいえないし，すべての初期分布からそこに収束するともいえないからである．

少数の剛体球が反射壁で囲まれている場合を考えるとわかりやすいが，ちょうどうまい初期配置から出発すると周期軌道に入ってしまうケースがある．これだと一様分布には行かないことになる．粒子数が多い場合には，こうした初期配置は極めてまれだろうし，ほんのちょっとのずれで駄目になってしまうのだから関係ない…といいたいが，それを実際に示すのは容易ではない．

また「初期状態を忘れて」一様分布に収束する*13)，というのも実はやばい．運動方程式は時間反転で可逆だから，粒子の位置と運動量が無限に正確にわかれば，逆にたどって初期状態がわかってしまうのである．なんらかの形で「有限精度」みたいなものを導入しないと問題の定式化さえできない．

さらに，証明の目標である「等確率の原理」が統計力学が成立する必要条件かどうかさえも本当は怪しい*14)．また，最初から量子力学で考えるべきだとか，「熱浴」込みで考えるべきだという意見にもそれぞれ一理がある*15)．

このあたりは統計力学ができて以来の百家争鳴の難問であって，ここで決着というわけにはいかない．ただ「力学だけで説明できない」といって，ただちに「力学は関係ない」にはならないことは注意しておきたい．あくまで比喩のレベルでだが，4節のサイコロの議論が参考になると思う．サイコロの対称性[A]だけからは等確率性は出ず，複雑な[B]を考える必要がある．しかし，だからといって「対称性がまったく関係ない」というのは無理がある．力学の役割についても同じではないだろうか*16)．

■　10. 統計力学と「存在」，そして確率一般　■

「統計力学と確率」というと，いま述べたような基礎づけの問題を想起する人が多いだろう．しかし，統計力学を実際に適用するとなると，個々の物理系について具体的なモデルを考える必要がある．

古典統計力学を応用しようとした人たちを悩ませたのは，モデルを詳細にしてゆくと結果が変わってしまうことであった．たとえば，2原子分子の気体の状態

*13)　ボルツマンは「超粒子」が全状態空間をくまなく巡ることで統計力学が成立すると考えたらしいが，後世の人はそれでは時間がかかり過ぎると思った．粒子数についての大数の法則を使う議論（6節）はひとつの代替案になるが，もし「短時間で実質的に記憶を失う」ことが示せれば，別の説明も可能である．「記憶を失う時間」より長い時間間隔で取ったサンプルは母集団からのランダムサンプルとみなせるので，全部開票するよりずっと前に選挙の「当確」が出るのと同じ理屈で，状態空間を全部回るより桁違いに速く答が出てもおかしくない．普通の実験ではどちらの説明も区別できないが，1分子計測のようなミクロな部分系を直接観測する手法を使えば，実験的に両者の区別ができるかもしれない．また，平衡状態だけでなく，等確率とみなせる状態への収束（緩和）も考えれば，「記憶」が失われる様子を論じることはどのみち避けられないという見方もある．

*14)　たとえば，架空の例だが，座標が有理数の点の上で一様分布し，座標が無理数の点の集合の確率がゼロだとしても，実験的には区別できない．

*15)　量子統計力学では「エネルギー固有状態」について等確率性を仮定することになるが，そのほうがわかりやすいという意見は多い．ただし，量子力学にしたからといって簡単に等確率の原理が導かれるわけではない．また，量子系特有の難しさとして，古典系での仮定に対応するものが量子系で何なのかすぐにわからなかったり，量子力学の定式化そのものの中に物理的内容が隠されていたりする点がある．たとえば「不安定な周期軌道が無視できる」が量子力学で何に対応するのかは自明ではない．

*16)　大数の法則の役割を早くに論じたものとして，ヒンチンの本[6)]がある．その13節では，大数の法則を使うことで「エルゴード性」（不変測度の分解不可能性）なしですますことが示唆されているが，力学から導かれるリウビルの定理はそこでもちゃんと使われている．

を表現するのに，分子の重心座標だけを考えるか，内部構造も考えるかで，比熱の計算値が大きく違う．この調子では，たとえば原子を電子と原子核に分けるなど，モデルの描写が細かくなると計算結果がどんどんずれそうである．古典統計力学を適用する場合には「何を物理的な実在と考えるか」が厳しく問われるのである．

実のところ，実験との比較はさらに驚くべきものであった．温度が高く平均エネルギーが大きいときには詳細な記述を用いた理論値に近く，温度を下げると粗い記述のほうに一致するのである．図 8 は 2 原子分子気体について定積モル比熱という量をプロットした図の様子を模式的に示したものだが，左端での値 3/2 が 2 原子の重心のみを考えたときの値に，真中のあたりの値 5/2 が回転を考慮したモデル，右端の値 7/2 が振動も含めたモデルに対応している．

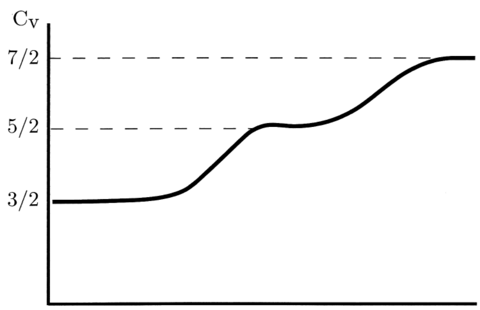


図 8　2 原子分子気体の比熱（模式図）．縦軸は定積モル比熱 C_V を気体定数 R で割ったもの．水素分子 H_2 以外では左端の領域は数 K～十数 K の低温に対応する．室温は，一酸化炭素 CO など軽い分子では真中の領域に当たるが，ヨウ素 I_2 など重い分子ではむしろ右端の領域に属する．

結局，この謎は量子統計力学の導入と従来のものを古典近似として含むような新たな「等確率の原理」によって克服された*17)．その詳細は統計力学の教科書に譲るとして，ここで強調したいのは，修正された理論の結果が「今後改訂されるかもしれない微細な構造に関する物理」に関して鈍感なことである．実際，その後，原子核の構造からクォーク，超弦にいたるまでの進歩があったにも関わらず，2 原子分子の比熱の計算値を修正する必要はなかったのである*18)．

物理学という学問は，それ自身として「世界に何が存在するか」を語り，世界の記述・切り分けを示すものである．しかし，それだけでなく「記述の細部の変更」について結果があまり影響されないような仕組みを内蔵していて，それが客観性をもたらしているように見える*19)．

話をゆっくり冒頭に戻そう．統計力学はその基礎付けこそ議論百出するものの，そこでの「確率」の使い方についてはしっかりした結論が得られているといってよいだろう．物理の外の世界で確率を応用する場合にはそうはいかない．常に世界の切り分け方，記述の仕方についての個別の判断を迫られるのである．

ここで「物理学のような安定した学問こそ理想で，他の分野で確率を応用する場合もそれをめざすべきだ」という主張もあり得るし，それはそれでありだと思う．しかし，著者の魂はもっとふわふわしているので，世界の多彩な現実と割り切れなさの中に魅力を感じる．

「いまある有限個のデータに合わせて，ヒストグラムをどう切ったらよいか」というような問題について，最終的な答のないことを知りながら，すこしでも客観的であることをめざす．究極的には語り切れないものを，すこしでも語ろうとするのが，確率を考えるということなのではないか，と思うのである．

*17)　朝永5)の冒頭では，このあたりの歴史的な背景から量子力学を説き起こしている．

*18)　もっとも水素分子の場合，核スピンの問題（オルト水素・パラ水素）があって完全な解決には手間がかかった．物理学の対象の複雑さもあなどれないわけだが，ここはあくまで大筋の話だと考えてほしい．

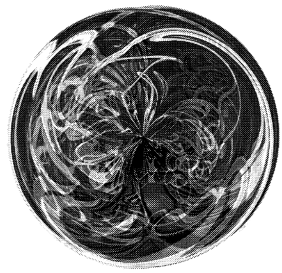
*19)　いま論じた以外の例としては，くりこみ可能な理論の低エネルギー極限の安定性があげられる．

参考文献

1) 伊庭幸人，『ベイズ統計と統計物理』，岩波書店．
2) 伊庭幸人，平均値から個性へ／統計的モデリングのひらく世界像，数学セミナー 2007 年 11 月号，日本評論社．
3) 伊庭幸人，「情報」に関する 13 章：私家版・情報学入門，物性研究 **78** No.2（ウェブ上で入手可能）．
4) C.M. ビショップ，『パターン認識と機械学習―ベイズ理論による統計的予測』，丸善出版．
5) 朝永振一郎，『量子力学 I』，みすず書房．
6) A.I. Khinchin, “Mathematical Foundations of Statistical Mechanics”, Dover.

（いば・ゆきと，統計数理研究所，総合研究大学院大学）

物理学にとって，無限大とは何だろうか？



細谷　暁夫

1. はじめに

物理学の歴史において，級数や積分が発散したりして問題になることがしばしばあった．その問題に取り組む中で，大きなブレイクスルーが起きたこともある．いくつかの事例を挙げながら，問題の整理をしておこう．

その大前提として，物理学は**測定（可能）量**だけで構成することはできないという事実は押さえておこう．一般的に言って，物理学は測定可能量の他にメタな量の概念をどうしても必要とする．例を１つ挙げよう．量子電磁力学において電磁場の自由度を電場と磁場だけで記述することは不可能であり，ベクトルポテンシャルを必要とする．しかし，ベクトルポテンシャル自体の値はゲージ不変でなく測定可能量ではない．

物理学が実証科学である以上，測定することのできる物理量が無限大になることは，本質的な困難である．有名な歴史的な例が，レイリーとジーンズの理論おける，**黒体放射の比熱の紫外発散**である．レイリーとジーンズは電磁波の振動数による各自由度に古典統計力学の等分配則を当てはめたために，比熱は紫外部で実際のものと大きく掛け離れ，振動数による積分をすると比熱は無限大になってしまう．

プランクは短波長側の実験とよく合うウィーンの法則とレイリーとジーンズとの内挿公式を作りその正当化として，光量子仮説を立てて結果的に量子力学への道を開いた．

このことを数学的にみれば，振動数の高いところにカットを導入するために新しい自然定数である**プランク定数 h** が導入されたとも言える[1]．このように，物理量が発散する困難を直接的に解消する方法はカットを導入することであり，そこから新しい定数が導入されることがしばしばあった．

一方，計算の途中で登場するメタな量に無限大が出てくるが，肝心の物理量には表れないように理論を組み立てる問題回避の道もあり得る．量子場の理論における**繰り込み理論**が代表であろう．そこでのメタな量としては，仮に相互作用がなかったとしたときの粒子の質量，すなわち裸の質量がある[*1)]．裸の質量は測定しようがないので無限大であっても実験に直接矛盾することはない．

しかし，計算過程で無限大を扱う場合，解析的な計算であろうと数値的な計算であろうと，無限大をいったん有限量に置き換える必要があるだろう．それを，業界用語で**カットオフ**と呼ぶ．カットオフは便宜的なものなので，例えばそれを２倍にしても，物理的な結果は変わらないように仕組まれているはずであるが，どうやってうまく行っているのだろうか？

少しだけ数式を使おう．繰り込み可能な場の理論において，摂動計算を行うと典型的には次のようなパターンになる．

---

*1）他に裸の荷電，波動関数の規格化定数があるがここでは触れない．

カットオフを Λ，結合定数を e として，最低次である量が，

$$e^2[a_0 + a_1 \log \Lambda], \tag{1}$$

次の次数で

$$e^4[b_0 + b_1 \log \Lambda + b_2(\log \Lambda)^2] \tag{2}$$

となるとしよう．

ここで，Λ を 2 倍しても同じ形をしているはずであるが，そうなるためには係数たち a_0, a_1 と b_0, b_1, b_2 との間に一定の関係がなければならないはずである．逆に言えば，a_1 が計算できれば b_2 など高次の値が分かる構造になっている．それが，**繰り込み群**の考え方である．

つまり，計算途中で無限大が出てきているけれども，測定可能な物理量が有限に収まっている場合に，その仕掛けの中に積極的に有意義な情報が入っているのである．

2. 記号 ∞ の由来

はじめから，話しが少し堅くなったようである．

そもそも，無限大の記号 ∞ の由来は何だろうか？ ぼんやり見ていると◯が 2 つ並んでいるようでもあるが，よく見るとループが途中で交わっている形をしている．

一説によれば，蛇が自分の尻尾を飲込んでいる図柄（ウロボロス，図 1）から来たものであると言う．しかし，これでは，無限大というよりは，永劫回帰あるいは無限ループであり，ニュアンスがズレているように思う．wiki ではローマ数字で 1000 を表す M 以外の書き方として CI と C を左右反転した文字からなるというのが有力と言っている．1000 で無限大とするのはいささか乱暴とは思うが，ローマ時代には実用上問題なかったのかもしれない．

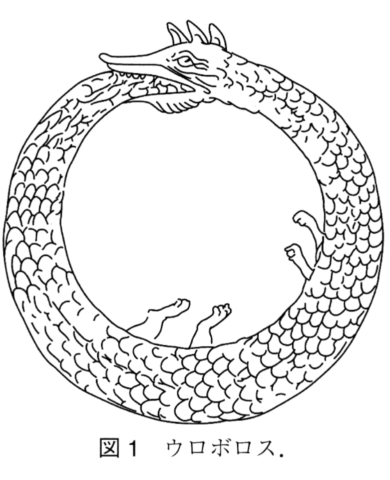


図 1　ウロボロス．

3. 無限大を考えたほうが簡単になる場合がある

力学におけるポテンシャルエネルギーは定数分だけ不定性がある．定数を足しても運動方程式が変わらないからである．特に，万有引力の場合は，中心からの距離を r として，その逆数 $\frac{1}{r}$ に比例するので無限遠点 $r = \infty$ を基準にするのが便利である．しかし，無限遠点とは何か，そもそも空間内の点なのかという問題が残る．通常の物理では，「充分遠方」つまり，エネルギーの測定精度が $\frac{1}{r}$ 程度の遠方という意味だと実際的に考えるのである．

逆に，考えている空間を有限に限った場合の物理法則を考えてみよう．例えば，原子の場合，大きさはせいぜい $10^{-10}\,\mathrm{m}$ ぐらいだから余裕をみて，一辺 $1\,\mathrm{m}$ の立方体の宇宙を考えれば充分だろう．もちろん，その立方体のところで適切な境界条件を置いてシュレーディンガー方程式を解くことが可能であるが，不必要に面倒くさくなる．無限に広がった空間を考えて，波動関数が無限遠点でゼロであるべしという境界条件を課して，束縛状態の問題を解くほうが簡単なのである．無限遠点を考えるほうが数学的には単純なのだ．もちろん，その束縛問題を計算機を使って解く場合は，空間を有限にとるが，背後に無限に広がるユークリッド空間が想定されている．

水素原子のエネルギーレベルなどの測定量の表式の中に考えている空間全体のサイズは入ってこない*2)．

---

*2)　赤外発散についての説明は大変なのでここでは述べない．

3.1 極限

無限大の存在以前の問題として，物理学における極限の概念について考えよう．まず統計力学を専門にする人たちが使う**熱力学極限**から始めよう．

巨視的な物理系でも，体積や粒子数は有限である．それにも関わらず，よく理論的に次のような極限を考える．例えばエントロピー S は粒子数 N と体積 V の関数である．そこで，統計力学における公式を用いて，エントロピー $S=S(N,V)$ を計算することを考えよう．N と V が大きいとき，エントロピーは

$$S(N,V)=Vs(n)+\text{おつり}. \qquad (3)$$

ここに「おつり」は，体積が大きいときに無視できる．ただし，$n=\frac{N}{V}$ は個数密度である．

ここまでが，物理的な言い方である．

これに対して，熱力学極限

$$s(n)=\lim_{V\to\infty}\frac{S(N,V)}{V}=s(n) \qquad (4)$$

としてのエントロピー密度を理論的に研究することがよく行われる．これは，極限を考えたほうが数学的に明快な結論が得られるためだろう．

その物理的な意味さえ押さえておけば，相転移などの本質をえぐり出すのに有効な方法だろう．

ただ，「$V\to\infty$ のときだけ，熱力学が成り立つ」などというと，現実世界に応用できない理論を扱うことになり，自分で自分の首を絞めることになる[2)]．

極限についての，この種の議論は何も物理学に限ったものではない．例えば，情報理論に出てくるシャノン情報量も，充分長い通信文に対して漸近的に定義されたものである．無限長の通信文というものは実在しないが，有限長でも充分長い通信文に対しても「おつり」が評価されていれば，有用であるだけではなく理論的にも完璧なのである．

ここで，「おつり」なるものをランダウの記号で $o(V)$ と書くと，作法にかなっているかもしれない．第1項のほうは，オーダー V すなわち，$\mathcal{O}(V)$ であるという．

このランダウの記号は物理で多用される．その数学的な定義については，例えば wiki を見てほしい．解析学に典型的な言い回しについては，節を改めて再論する．

極限の話になり，無限大との関係が見えなくなったかもしれない．極限から無限大が表れる有名な例として，**ブラックホールの地平面**を取り上げよう．ブラックホールに落ちていく粒子を遠方から見ていると，いつまでたっても地平面（太陽質量程度のブラックホールの場合は半径 3 km くらい）に到達しない．

つまり，粒子が地平面に到達するのには無限大の時間がかかる．しかし，自由落下する観測者は“何ごともなかったかのように”有限時間で地平面を突っ切る．

観測者に依存する無限大は困難と言うよりは，物理的に興味深い現象というべきだろう．一方，自由落下する観測者が中心に近づくと空間の曲がりが大きくなり，潮汐力を受けて引き裂かれる．このような点を**特異点**と呼ぶ．これは，古典相対性理論の破綻を意味するので，「困難」と言えるだろう．しかし，これについても問題回避の道がある．その特異点が地平面に取り囲まれていたら，そとの世界の観測者にとって，特異点を見ることはできない．現実のブラックホールには，物理的な生成過程から特異点が地平面の中にあるはずだという仮説（**宇宙検閲官仮説**）がある．この仮説は，前提とする「物理的過程」がうまく表現できないために反例すらあるものであるが，多くの相対性理論の研究者が認めている．

4. 無限大の自由度

自由度を理解するために，ファインマンが面白い例を上げている．中空の容器の中に粒子を一個入れておこう．その容器を手で揺するのである．粒子は容器の壁とぶつかりながら速度を上げていく．運動する容器の壁からエネルギーを貰うからである．これをずっと続けると粒子のエネルギーをいくらでも上げることができそうである．しかも，手と容器は巨視的なものであるので，粒子が

陽子であるならば加速は極めて容易だろう．LHCのような，巨大加速器を作らなくても，極めて安価に陽子を加速できる気がするが，そういう話は聞いたことがない．

どこが，間違っているのか考えてみよう．陽子が加速されると制動放射として電磁波が出てきてエネルギーの一部は光子のエネルギーとしてそちらのほうに振り向けられる．その光子のエネルギーもある程度以上になると，電子，陽電子対を作る．同様にして，より大きな質量を持つ粒子が作られ数も増していく．結局，はじめの陽子に行くエネルギーは一向に上がらないのである．

そもそも，それらの粒子はどこから湧いて出てきたのだろうか．実は，場という連続無限のものが空間を満たしていて，陽子，電子，陽電子などはそれぞれの場の局所的な励起であると捉えるのが最近の物理学の考え方である．そこでは，粒子の位置とスピンなどの自由度は無限大であり，さらに場の種類の数が掛かり膨大な自由度が空間に満ちている．

その無限大の自由度自体はその大きさを計測するようなものではないのだが，自然界に存在すると想定されている．

5. 無限小

無限大の対極にある無限小の概念も物理にはよく使われる．その使われ方を眺めてみよう．

典型的なものが解析力学でおなじみの作用原理である．作用 S は，粒子の座標 x と速度 $\dot{x}$ の関数であるラグランジャン $L(x,\dot{x})$ の時間積分

$$S[x]=\int dtL(x,\dot{x}) \tag{5}$$

で表される．運動方程式は作用 $S[x]$ の停留点として導かれる．すなわち，粒子の座標 x の変化分 δx に対する作用の変化分を δx を時間積分の上端と下端でゼロとし，

$$\begin{aligned}0 &= \delta S[x]\\ &=\int dt\left[\frac{\partial L}{\partial x}\delta x+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}L\delta\dot{x}\right]+\mathcal{O}((\delta x)^2) \quad (6)\\ &=\int dt\left[\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}})}{dt}\right]\delta x+\mathcal{O}((\delta x)^2) \quad (7)\end{aligned}$$

のように計算する．δx は端点以外では任意だか括弧 [.....] の中身がゼロであるべきだという要請から次のオイラー–ラグランジュ方程式が得られる．

$$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}})}{dt}=0. \tag{8}$$

解析力学の講義をしていると，おつり $\mathcal{O}((\delta x)^2)$ はどうしてくれるという質問が出てくる．**2 次の微小量**だから無視してよい，という物理によく出てくる言い回しの根拠を訊いているのだ．この段階で無視できてもあとで積分の中に代入しても積もることはないのか，など．

この問題は結構手強い．解析力学の範囲では答えにくいのだが，量子力学から出発し確率振幅の経路積分表示を鞍点法（JWKB）近似を用いて，作用原理を近似として導く立場を取るならば，無視した項の定量的評価もできそうである．そこにはプランク定数 $\hbar$ が入ってくることはもちろんである．

この 2 次の微小量だから無視する，という論法はたいていの場合よいのだろうが，誤差を押さえた議論を端折る場合も多い．

ここで 2 次以上の微小量に関連してカソリック教義における「**微罪**」(a venial sin）について考えてみたい．wiki の項目には次のようにある (http://en.wikipedia.org/wiki/Venial_sin)．

According to the Magisterium, venial sins usually remain venial no matter how many one commits[4). They cannot "add up" to collectively constitute a mortal sin, but their accumulation does lead to being more vulnerable to committing mortal sin[5).

日本語訳

カソリック教会の教導書によれば，微罪は何回繰り返しても微罪であり続ける．微罪が累積して大罪になることはない．

そもそも実証科学である物理において，超越的

な“微罪”なるものがあるのか，疑問に思う*3)．

6. 物理に ε–δ 論法は有効か？

解析学で極限を厳密に扱う代表的な例が，ワイエルシュトラースによって完成された「**ε–δ 論法**」である．これは，通常高校の数学では教わらない．筆者が高校2年生のときの数学の先生が面白い方で，関数の連続性についての ε–δ 論法を教えて下さった．その奇妙さに驚くとともに，日本語が理解できなかった．関数 $f(x)$ が $x=a$ において連続であるということを ε–δ 論法で書くと

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0; |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon. \tag{9}$$

この式を読み下すと，「任意の有限の正数 ε に対して，適当な正数 δ が存在していて，$|x-a|<\delta$ ならば $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$」となるが，とてもまともな日本語とは思われない．それは2人（ε を与える人と δ を提示する人）の台詞を一緒くたにしているためだ．

ε–δ 論法が，対話により相手を追いつめていく，まさに「責任転嫁の論法」であることを理解したのは大学に入学したあとであった．相手に ε を言わせて，それを聞いてから δ を提示して文句を言わせないのである．文句があるのなら別の ε を言ってみろよ．と言う論法である*4)．

一時期，あちこちの理工系初年度の数学の授業で，この ε–δ 論法を教えるべきかどうか教師の間で論争があった．数学出身の教師としては是非残したいところであろうし，工学部の教師からすると「役に立たない」，そして凡庸な学生にとっては

*3) 「微罪」の概念が神学の中で聖書から演繹的に導かれたものとはとても思えない．私が昔映画で見た「告悔室」の光景が参考になるかもしれない．信仰心のひとかけらもない強欲男が告悔室で，尊敬すべき神父の影を踏んでしまったとか些細なことばかり延々と告白して，告悔僧をウンザリさせているシーンである．この種の「時間の無駄」を一掃するための整合性のあるコンセプトが，venial sin だったのではないだろうか．

*4) 超準解析では無限小の量を扱うことができる，と聞いているがあまり理解していないので割愛する．

意味不明でさえあるだろう．物理の教師の意見は賛否相半ばするように思う．

学問の世界では「厳密」というものがあるという代表的なものなので，理系文化の神髄として残すべきだという理念派と「無用の念仏」を学ぶよりも3重積分のやり方を練習させろという実用派に分かれる．

それでは，ε–δ 論法は物理とは無縁のものなのだろうか？ 実は，相対性理論には出てくる．特異点定理の証明を目的とした有名なホーキングとエリスによる本[3)]の311ページに，時間一定面の作る時空体積が時間の連続関数であることの証明にこの論法を用いている．しかし，これは証明を厳密にする手段として ε–δ 論法を用いたに過ぎなく，その対話性を取り入れているわけではない．

物理の理論の作り方には，解析力学を代表とする演繹的なものと熱力学のような操作的なものがある．相対性理論においてローレンツ変換を導くときに，普通の教科書では世界間隔の不変性から数学的に導くが，アインシュタインの1905年の原論文では，異なる場所にある時計を光の信号のやりとりによって合わせることから出発する**操作的な方法**を採っている．量子情報理論におけるアリスとボブの関係の原型にも見える．

演繹的な議論は，理論にある程度見通しがついてから展開されることが多いと思う．一方，試行錯誤の段階では思考実験などの操作的な方法が手がかりになった．

やや閉塞感のある物理学の次のブレイクスルーを模索する人たちの中には，操作的な方法に着目する人もいる．その中で極限を扱わなければならないとしたら，アリスとボブの設定に ε–δ 論法を取り込んで極限を物理的に表現できないものだろうか？

7. むすびと量子重力

はじめに戻ろう．ある理論に基づいて測定可能量を計算して結果が発散するならば，その理論は明らかに破綻している．何らかのカットオフを導入しなければならないが，それは新しい物理を導入することになる．しかし，計算途中で無限大が出てくるけれども，観測可能量にはそれが表れないようにすることが可能ならば（少なくとも当面は）問題を回避できたことになる．

ところが，アインシュタインの一般相対性理論をそのまま量子化した場合には，繰り込み不可能であることが知られているので，観測は可能でない．多くの研究者はプランク質量（$10^{19}\,\mathrm{GeV}/c^2$）が，量子重力のカットオフを与えると予想している．言い換えると発散のない有限な理論があって，それが特徴的に含む定数がプランク質量である[*5)]．

プランク質量は粒子の質量から決まるコンプトン波長とシュバルツシルド半径を等しいとおくと得られる．粒子の質量の作る重力が強くて，その量子効果を外に見せない限界の質量である．そこで，ブラックホールの量子効果を理論的に研究することが，量子重力へのヒントを与えてくれると期待する人たちもいる．

その過程で，ブラックホールに関係する思考実験が取り上げられる．私見を述べれば，多くの仕事は思考実験とは言え，結局はモデル計算であり，議論が操作的になっていない．

本稿と，この特集全体のテーマである物理学における「存在」との関連を述べよう．多分，無限大（小）は存在するか，ということだろう．これまで述べてきたことをこの観点からまとめると答えはあまりにも常識的である．無限大（小）は存在はするがそれを認識はできない，と．というよりはそのことを前提に理論を構成しているのである．一言断ると，存在すると言うのは「富士山がある」というような「実在」の意味ではなく．正三角形が存在すると言うときの存在である．

最後に，物理学における“深い問題”と言われるものには極限を含むものが多い．宇宙の始まりの初期特異点がその例である．無限大の存在はその最たるものだろう．歴史を辿ると，アリストテ

---

*5) プランクは黒体放射理論以前にプランク質量を次元解析から導入している．そこでは，ウィーンの理論に出てくる定数を作用量子の代わりに用いている．

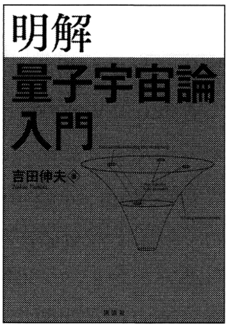
レス，ジョルダノ・ブルーノなどが無限大について考察しているが，後者は宇宙が無限であると考えていたようである．一方，日本の文献にはとんと表れない．徒然草の終章でこの世の始まりについての父子の対話があるが，「天から降ったか地から湧いたか」いう父親の言葉で打ち切られている．無限大の存在問題自体が文化的背景に依存した相対的な問題なのかもしれない．

参考文献

1) 朝永振一郎著『量子力学 I, II』（みすず書房）．
2) 清水　明著『熱力学の基礎』（東京大学出版会）．
3) S.W. Hawking and G.F.R. Ellis, *The Large Scale Structure of Apace-time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
4) "However venial sin does not break the covenant with God." (http://www.vatican.va/archive/ccc_css/archive/catechism/p3s1c1a8.htm).
5) "But do not despise these sins which we call light: if you take them for light when you weigh them, tremble when you count them. A number of light objects makes a great mass." (http://www.vatican.va/archive/ccc_css/archive/catechism/p3s1c1a8.htm).

（ほそや・あきお，東京工業大学名誉教授）

明解 量子宇宙論入門



吉田伸夫著，A5 判，267 頁，本体 3800 円，講談社

『現代物理学の世界』（講談社）所収の拙稿にも書いたように，私は長いこと映画を見て育ってきたので，つい比較の対象が映画の話になってしまうのだが，職業としての科学研究は，映画の仕事と似ていると思う．企画・脚本・キャスティング・撮影・編集をして作品としては完成しても，興行をしなければ終わりではない．研究のほうもアイディアから論文執筆までのプロセスの各段階を，映画制作の各段階になぞらえられる．そして，論文を書いたら終わりではなく，多くの人に自分の研究成果を知ってもらう，という「興行」に対応する部分も，昨今はますます重要になっている．しかし，決定的に違うのは，映画には映画評論とそれを書く映画評論家がいるが，科学評論や科学評論家というのはことわが国にはまず存在していない，ということである．

昨今大学や研究機関を巡っておかしなことがいろいろ起こるので，そういうときに，権威ある(？)科学評論家が現場の声をうまく代弁してくれるとよいのになぁ，と思うことがよくある．例えば，少し前に文部科学省の科学技術政策研究所というところが，米国との共同研究論文数の国別推移を発表した．それによるとこの十数年で急増した中国が英国を追い抜いて遂にトップに立ったのに対し，わが国は漸次シェアを下げ，遂に7位まで転落したという．「科学大国である米国との国際共著論文は世界的に通用し，影響力も高い価値ある研究成果と位置付けられる」ので，わが国の「低迷ぶりが目立つ」という報道だった．

私の解釈はちがう．

米国が「科学大国」であるのは間違いないが（同時に犯罪大国，IT スパイ大国でもある），日本も今や米国・欧州と並び基礎科学研究における世界三極の一翼を担っている，といっても過言ではない（ただし，規模は欧米の半分以下といえよう）．わが国の優れた先達の薫陶を受けたお蔭で，国際会議に出掛けても，「なぜこんな自明なことで論争になるのだろう？」と感じることも少なくない．つまり，日本で世界に通用する研究を行うのに，今や米国の研究者と共著論文を書かねばならない理由などないのである（ただし，わが国は英米語での発進力が弱いのは確かなので，その点では助けにはなる）．むしろ，遅れているのはこんな解釈しかできない「科学技術政策研究所」のほうである．

前置きが長くなった．

さて本書，『明解 量子宇宙論入門』は，最先端の数式がいっぱいでてくる難しい本だが，著者も強調しているように，この分野の教科書ではない．厳格に見たら，おや？ と思うような記述もなしとはしない．その限りにおいては，初期宇宙論の教育に直接役に立つ本ではない．むしろ，分野全体を俯瞰するための「ガイドブック」なのだという．たしかに，相対論的宇宙論，場の量子論，インフレーションモデルとその観測的帰結，ダークエネルギー，宇宙の量子的生成，振動宇宙論，多重発生宇宙論*1)，人間原理と多世界解釈まで網羅されている．

じっさい，この分野のように茫洋としていて変化のスピードも速いトピックについては，積み上げ式の勉強だけでは，木を見て森を見ない，ということになりかねない．こうした研究分野に広く通じた優しい先輩が近くにいれば，助言を請えばよいのだが，そんなことはなかなか望めることではない．そういうときにこの本は役に立つ．

そして，このような書物が日本語で出版される，ということは大書特筆してよい快挙であり，著者と出版社の労を多とする．英語でもこのような「ガイドブック」はないから，これはわが国の文化水準の高さを如実に表すものであると考えてよい．惜しむらくは，おそらくこのような本書の意義を著者自身理解してないのであろう，このテーマは日本人の貢献の多い分野であるにもかかわらず，それが十分に語られてないことである．

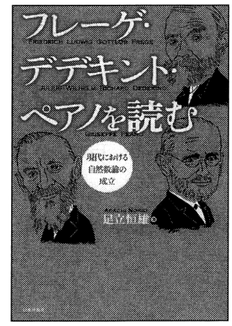
横山 順一（東京大学大学院理学系研究科）

*1) インフレーション宇宙論の生みの親の一人でもある佐藤勝彦氏を嚆矢とするが，このことに触れられていないのはたいへん残念である．

フレーゲ・デデキント・ペアノを読む

現代における自然数論の成立

足立恒雄著，四六判，216 頁，本体 2400 円，日本評論社



19 世紀から 20 世紀にかけて活動した 3 人の数学者たちが「数とは何か」に関する考察を著した．ここで「数」は自然数を指す．フレーゲは述語論理によって，デデキントは集合論によって，ペアノは公理によって数の体系を提示し，その妥当性を説いたのである．

タイトルが示すように，本書の目的はこの 3 人の著作を，原文を紹介しつつその意味を解説することだ．これは実は大事業なのである．論理的に構成された証明であれば，ある程度分かりやすく説明することは可能だ．しかしデデキントのタイトルを借りれば，「数とは何か，何であるべきか」などという疑問とそれに対する解答の試みには，様々な要素が絡む．19 世紀後半の数学観，記法や表現の仕方，さらに広く社会的な時代背景も関係することがある．しかも本人たちも試行錯誤をしつつ思考を重ねているのだ．原文を正確に訳してもらっても理解不能なことが多い．解説してもらっても，かえって謎が深まることもある．

著者はそのような諸事情を念頭におきつつ，謎にぶつかる都度に関連文献を調べている．関連文献には，原典と同時代の文献あり，原典に関する研究や解説あり，しかもどこかで底を打つわけではないから，際限がない．本書では直接あたった文献はそのように引用してあるが，最後は自分の解釈にならざるを得ない事態が多くある．そのときは著者自身の意見であることを明記してあるし，どこかで読んだ，聞いた，という事柄に関してはそのように記してある．用語も「本書ではこう使う」と明言している．読者には，このようなコメントを素通りせずに読み分けることを勧める．

本書はまず，本題への読者の誘いとして，いくつかの辞典における自然数の項目を紹介している．その後「性質」，「概念」，「定義」，「公理と公準」などを含む，論理的な基礎知識についての解説がある．これらの準備を必要最小限にとどめるのには相当な工夫があったことだろう．

続く歴史的背景では，件の 3 人に至る「現代数学の夜明け前」の，グラスマンやハンケルの数についての考察を概観している．

各所に余談が入っているが，それらは決して無駄なことではない．原典が書かれた当時の状況がそれとなく垣間見られたりして，より良い理解につながるからだ．全体として，本筋に関することは丁寧に説明があり，しかも著者独特のリラックスした語りのような筆致で書かれているので，いつの間にか読み進んでしまう．

ここで「本書限定」の言葉の使い方で，一般読者には誤解を招きそうな箇所をいくつか指摘しておきたい．著者は混乱を避けるために触れていないのであろうから，補足のつもりである．一つは「公理主義・形式主義」という表現で，これは「公理主義すなわち形式主義」という意味なのかと思うが，「公理主義」という表現は日本でのみ通用するものである．これを英語に訳すつもりで axiomatism などと書かないように！ そういう「イズム」はないのである．日本になぜ「公理主義」が出現したか，については，数学セミナー 2000 年 2 月号の林晋氏の記事およびホームページ（www.shayashi.jp/旧「数学基礎論の歴史」のページ）に詳しい．

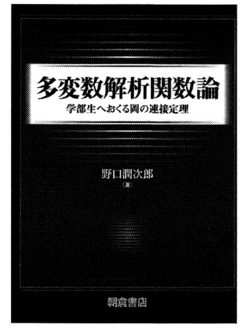
また，序文で「算術」を自然数論と同義語であると規定している．本書を読むのには全く差支えないが，一般には「算術（arithmetic）」は四則の演算に関する計算を指すことを添えておきたい．

本書には著者の価値観も随所に著されていて興味深い．しかし，本書における価値観は「数の概念について」という観点に基づいたものであり，数学史全体の観点からではないことに留意しておこう．観点によって見える世界は異なり，それゆえものごとの評価には多様性があり得るのだ．たとえば本書によれば，数学基礎論の観点からはクロネッカーは好意的に見られていない．しかし代数的整数論などにおける業績は偉大なものとして評価されているのである．

最後に一つだけ，うっかりミスを指摘しておきたい．5.3.1 節のフレーゲの論理式の紹介で，$A \to B$ とあるが，正しくは $B \to A$ である．また，図のように $\vdash$ がついているときは「$B \to A$ が正しい」という主張であり，単なる論理式には $\vdash$ はつかない．

八杉　滿利子（京都産業大学名誉教授）

多変数解析関数論
学部生へおくる岡の連接定理



野口潤次郎著，A5 判，372 頁，本体 6200 円，朝倉書店

複素数を変数とし複素数を値とする関数，すなわち一変数複素関数の理論は，19 世紀に，ほぼ完成している．それは非常に美しい理論で，学ぶ人々を魅了してきた．また，流体力学など，理工学のいろいろな分野に応用された．

一方，多変数複素関数論については，一変数複素関数のアナロジーとしてすぐに証明されることは別として，多変数特有の困難さがその基礎部分にあり，しかもそれらが真に難しい問題となっていた．1936 年–1953 年の一連の論文で，これらの困難な問題にことごとく解答を与えたのが，岡 潔である．この業績により，岡 潔は 1960 年に文化勲章を受けた．

本書は主として，多変数複素関数論の基礎の部分を論じている．必然的に岡 潔の業績の解説が主要部分となっている．岡 潔の論文は大変難解で，その理論を学部生が読めるのだろうか，と心配しつつ読んでみたが，その心配は無用であった．

この本の各章では，そこで最も大切なことを初めに述べて，必要なときは数学の他の分野からの道具をわかりやすく解説しつつ導入し，定理や命題，補題には簡潔で明快な証明を与えて，着実に目的地に到達している．さらに証明のポイントや，読者が迷いやすいところの注意や，歴史的な解説や，他分野との関連の解説などが，各所にちりばめられて，読者が安心して読み進めるようになっている．新しい概念の説明も，読者の心理的負担を，できるだけ少なくするような工夫がなされている．

本書の内容をざっと紹介しよう．第 1 章では，多変数正則関数の性質で一変数複素関数論のアナロジーとしてすぐに証明されることを述べた後，一変数では起こらない現象の一つ「ハルトークス現象」を説明し，それとの関連において，領域の正則凸性を定義している．正則関数の層の連接性（岡の第一連接定理）を早めの第 2 章で述べ，証明しているのは，類書になく，本書の特徴である．これは，連接性が最も重要で全理論の基礎にあることを強調するために工夫された構成である．そして，第 3 章での層のコホモロジーの解説の後の第 4 章で，岡–カルタンの基本定理「正則凸領域上の連接層の 1 次以上のコホモロジーは消滅する」が証明されている．そこでは，岡の第一連接定理と岡の上空移行の原理が，本質的役割を果たしている．

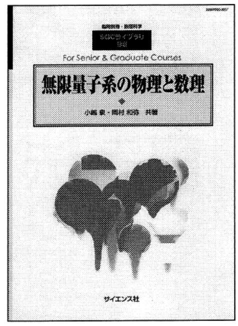
第 5 章では，カルタン–トゥレンの定理「正則凸領域と正則領域の同値性」の証明が与えられる．また，岡原理「スタイン多様体上の正則直線束が自明なことと，そのチャーンクラスがゼロであることの同値性」も証明されている．第 6 章では，解析的集合と複素空間の概念が説明され，岡の第 3 連接定理と岡の「正規化の存在」が証明されている．この辺りの定理の証明は，前章までの定理の証明に比べ難しいが，それでも，わかりやすくする工夫が各所で感じられる．この第 6 章は，代数幾何，複素幾何との関連が深い章である．第 7 章は，多重劣調和関数の説明の後，岡の定理「擬凸なリーマン領域は正則領域である」の解説と証明にあてられている．この章でも，難しい内容を，わかりやすく解説しようとする著者の工夫が各所に感じられる．第 8 章では，グラウエルトの消滅定理が示され，それを用いて，小平の定理「ホッジ多様体は射影代数多様体である」が証明される．この証明法を見ると，小平の定理が，特異点を持つ多様体の場合にも拡張されることがわかる．

本書の終わりに「連接性について」の解説があり，さらに「余禄」で，岡 潔の事跡と多変数複素関数論の専門家たちの様子が写真入りで語られている．

この，よく工夫されわかりやすい，そして滋養深い本書を通読すれば，読者は，多変数複素関数論における岡 潔の役割がいかに大きいか，そして彼の導入した諸アイデア（それらは後世に大きな影響を与えている）が，いかにすばらしいものであるかを納得するだけでなく，本書で与えられた数学力を武器に，さらにこの分野，関連分野のみならず，いろいろな分野の学習研究を進めていけるに違いない．

難 波　誠（大阪大学名誉教授）

無限量子系の物理と数理



小嶋泉・岡村和弥共著，B5 判，224 頁，本体 2381 円，サイエンス社

プランクが量子仮説を提唱して幕を開けた 20 世紀は，量子力学の大発展によってもたらされた科学技術の革新に支えられてきたと言える．古典力学に代表される従前の理論はマクロスケールを記述するものとして切り離され，ミクロ量子世界に対しては量子力学こそがすべてを司る決定版として，理論から工学的実用までを含めて，数多くの成功体験を積み上げてきた．

著者たちは，そのような画期的な成果を踏まえつつもなお，「物理学・数理物理学としての量子論固有の歴史的展開の中で，ある種の深刻な退化，変質が生じた」という認識を示す．量子論の初期では，立ちはだかる前人未到の課題に対して，古典力学の知識を頼りとする「量子古典対応」が導きの糸として機能した．莫大な個数のミクロ量子の集積効果を我々は古典論のマクロレベルで見ているという仮説の下で，ミクロ運動のあり方を探究する発見的アプローチが鍵となった．しかしながら，量子論は次第に有限自由度系を対象とする量子力学の理論建設へと収斂し，無限自由度量子系の理論（量子場理論）のほうは，量子論がそもそも電磁場に関する問題から出発したはずなのに，未だ理論化の徹底がなされていない．一方，日進月歩の実験技術は，ミクロともマクロともつかない量子と古典の狭間「メゾスコピック」に踏み込んで，新しいテクノロジーを生み出そうとしている．超伝導体，超流動体，量子ドットなどの巨視的量子現象は今や実用研究の対象である．ミクロ系の振舞いを精密に測定し制御する技術では，否応なしに量子観測問題に直面する．

著者たちは，このような量子論の歴史や最新の実験技術を俯瞰するとき，今ほど真剣にミクロとマクロの橋渡しを考えるときはないだろうと訴える．本書の主題は，量子力学の意味論あるいは解釈論として，通常の議論からは締め出されてしまった「量子古典対応」に対して，数理物理学の最新成果を武器に新たな光を当てることにある．特に，代数的量子場理論とその表現論を軸として量子古典対応を合理的に拡張した「ミクロ・マクロ双対性」によって新しい形に定式化された量子論を世に問うものである．

本書は量子系の物理を学ぶための「標準的」な教科書ではない．量子論の発展の過程で封印されてしまった問題意識を掘り起こし，無限量子系の問題点を論じ，それを解決するための方法論として「ミクロ・マクロ双対性」に導くための入門的専門書である．知識を増やし，いたずらに計算技術の習得に励むのではなく，いかに問題意識を持つべきかという根本を問いただすというスタイルが貫かれている．著者たちの批判的精神に触れるだけでも，科学的な態度，精神とは何かを考えさせられる．著者たちは「本書を一読した上で，「標準的」とされる量子力学教科書の内容と比較検討し，どちらが自然かを自らの頭で判断されればよいと思う」と言い放ち，読者に重い宿題を投げかける．若く柔軟な研究者ほど，著者たちからの挑戦を受けて立ってほしいと思う．とはいうものの，明晰な論理展開と丁寧な記述，ところどころに聞こえてくる著者たちの囁きによって読者を自然に引っ張るところはさすがである．現代数学の諸概念が心地よく縦横に駆使されるのを眺めるのも楽しい．

著者のお一人である小嶋泉氏は，量子場理論の基礎研究に異彩を放っている数理物理学者である．もともとは量子電気力学の研究で知られるが，最近では量子場理論という現代物理学の最先端を走る理論の奥底に深く沈潜した問題にむしろ傾注してこられた．2002 年頃から「ミクロ・マクロ双対性」の着想を得て，その後，京都大学数理解析研究所や基礎物理学研究所の研究会を継続的に組織し，多くの研究交流を通して理論の体系化が進んだとうかがっている．本書では新進気鋭の岡村和弥氏を共同著者として迎え，若手研究者にとってより親しみやすい構成となった．本書を準備編とするならば，より専門家向けには，小嶋泉著『量子場とミクロ・マクロ双対性』（丸善出版，2013）がある．合わせて読むことをお薦めしたい．

尾畑 伸明（東北大学大学院情報科学研究科）

リレー連載 数学的な感覚の探求 第13回

思考法の源を探る

自明でない最初の場合を考える

中村　郁

1. 3 次式と楕円曲線

最近数年は Silverman の『楕円曲線』（“The Arithmetic of Elliptic Curves” (2nd ed.), Springer, 2009）をテキストに使ってセミナーをやった．そこでは多項式

$$y = x^3 + ax + b \tag{1}$$

が問題になる．この方程式の解のなす空間を楕円曲線と言う．『楕円曲線』は，とくに a, b が有理数の場合に上の方程式の有理数の解を研究する．テキストは面白いのだが，振り返るとセミナーには毎年共通の問題があったように感じられる．

楕円曲線は別の表示を持つ．唐突だが商空間

$$E := E(\omega) = \mathbf{C}/(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\omega)$$

を考える．ここで ω は $\mathrm{Im}(\omega) > 0$ となる複素数を表す．また，E の右辺は，2 点 $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$（複素数）が $z_1 - z_2 = n + m\omega$（$n, m \in \mathbf{Z}$: 整数）の時に限って，E の中で同じ点を定めるものと約束する．これを複素 1 次元トーラスと呼ぶ．これは，図 1 の「ドーナツ」の表面の「円環面」，すなわち，実 2 次元トーラスである．

複素 1 次元トーラスは，2 次元複素射影空間の中に実現できる．同次座標を用いれば，適当な複素数 a, b を選んで

$$x_0 x_2^2 = x_1^3 + a x_0^2 x_1 + b x_0^3 \tag{2}$$

となり，非斉次座標を使えば，(つまり，$x = x_1/x_0$, $y = x_2/x_0$ とすれば）(1) となる．(1) の複素数の解すべてを集めると，それは複素 1 次元トーラス（から 1 点除いたもの）と一致する．

この事実は，リーマン・ロッホの定理や関数論の様々な結果を基礎に証明される．だから決して自明でない．その意味では 3 次式からトーラスを想像するのは，やさしいことではない．

話をもとに戻そう．『楕円曲線』のセミナーの時点では，代数幾何を学んでいない学生には，楕円曲線が複素 1 次元トーラスであるという感覚がまだない，だからまだ幾何学になっていない，その結果，おそらく 3 次式だけを思い浮かべている．

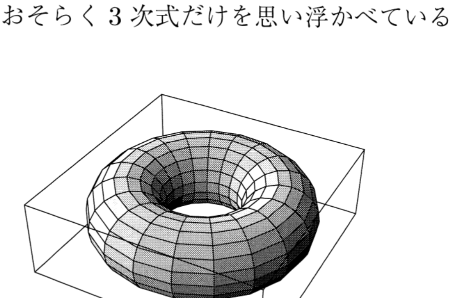


図 1　ドーナツの表面．

3 次式から幾何学を想像するのは，どうも学生にとって一つの壁であるらしい．

2. 絶対音感

モーツァルトは生来「絶対音感」を持っていた，という話は有名である．しかし，「絶対音感」はヨーロッパ音楽（西洋音楽でかつ十二平均律による音高）に対する音感だから，生来の感覚だとしたら少しおかしい．遺伝子レベルで受け継がれるというのだろうか？ 胎児の頃にヨーロッパ音楽に接しなかったロシア人や日本人ではどうなるのだろう，生来なのか，それとも幼少時の訓練で身に着いたものなのか？

最相葉月『絶対音感』（小学館，2002 年）によれば（あるいは，現在は，インターネットでたくさんの経験談を読むことができるが），おおむね 3 歳から 6 歳の頃に，正しい教育を受け，本人も興味を持って努力すれば，身に着く能力であると考えられている．以下は知り合いの息子さんの話である．息子さんは 3 歳のときから 4 歳上のお姉さんのピアノのレッスンにいつも同席していたので，「絶対音感」を持っていたらしい．札幌の地下鉄は 2 種類の車両が走っているが，そのゴムタイヤの走行音にはわずかにピッチの差があるらしい．彼はその差を聞き分けて，今度どちらが来るか正確に言い当てることができたそうだ．

「絶対音感」がなくても優れたプロはいる．探せばきりがないと思うが，例えば，作曲家の小椋佳も歌手の美空ひばりも，本人はともに「楽譜は読めない」と話している（いた）．「絶対音感」があれば楽譜は読めるはずである．

「絶対音感」は音楽家にとって大切な能力たり得るだろう．しかし，それは常に幸福な能力とは限らないらしい．「絶対音感」が身に着いている結果，生活音がすべて音階を持って聞こえてしまうのでわずらわしい，と嘆く文章に出会ったことがある（その人はもちろん音楽家ではない）．

3. 経験と感覚

ところで，数学の場合には「絶対数感」というのは聞いたことがない．そもそも意味が不明である．「数」を感じるというのは，いったい何を意味するのか？（私は知りません．）しかし，組合せ論や整数論の専門家には，具体的な数字に鋭い直感を示す人がいる．

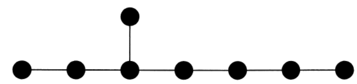


図 2　E_8.

2012 年，Montreal に McKay（マッカイ）を訪ねた．McKay は Monster 群をはじめとする有限群の研究で名高い人である．彼の研究室は Concordia 大学の 2 階の 235 号室であった．彼は言った，「E_8 なんだ」．E_8 とは，図 2 の折れ線図形を指す．図形の枝の長さは上，左，右の順に数えて，2, 3, 5 とするのが一般的である．黒円の個数は合計 8，E_8 の添え字 8 に対応する．これが，McKay が部屋番号 235 を「E_8」と言った理由である．E_8 は数学的に深い対象であるが，それはまさに McKay の専門である．

滞在中，彼は一つの興味深い計算結果を見せてくれた．Monster 群という巨大な群に関して現れる，ほとんど相互に関係のない数値の和が 2^{10} となるというのだ．この数値は Monster 群のある部分群の位数と一致する．この理由をモジュライ理論を用いて説明できないか，というのが彼の問題であった．そもそも，なぜそんな計算をするのか（したくなるのか），全くわからない．不思議な感覚の持ち主である．

「絶対音感」は（本人すら意識しない）幼児期の訓練の結果である．同様に，『世の中で漠然と「数学的感覚」として理解される感覚』もまた，訓練の結果である．天才は確かにいる．しかし，数学の能力は努力に負うところがあまりにも大きい．世に天才と呼ばれる人々も，実は人並外れた努力をしているものである．

それならば，我々普通の人間はどうしたらいいだろう？ 私見では，「感覚を養う」ために，やさしい場合を細部までわかりつくす（ようにする）のが

近道だと思う，天才にはかなわないとしても，である．やさしい場合，もっと正確に言えば，「自明でない最初の場合」を正確に理解して「正しい感覚を養う」のである．それだけではない．「自明でない最初の場合」を詳しく知ることで，難しい場合の重要な一部を理解できることがある．

4. 十勝沖地震

2003年の十勝沖地震では，地震の衝撃波が過ぎ去ってしばらくして，突然苫小牧の石油タンク（直径42 m，高さ24 m）が揺れ出した．やがてタンク内部のガソリンが漏れ出て引火し，タンクは炎上した．これは，地震波（この場合は表面波）の振動数と石油タンクの固有振動数とが極めて近く，タンクが共振（共鳴）して，ちょうど，水を入れたコップを運ぶとき水面が大きく揺れ動くように，内部のガソリンがスロッシング（うねり揺れる現象）を起こしたためであった．

石油タンクの蓋は金属製だが，安全上の理由から，固定蓋ではなく浮き蓋である．スロッシングでタンクの浮蓋はタンクの外壁に繰り返し衝突し，浮きが壊れて蓋がタンクの底に沈んでしまったのである．石油タンク内部のガソリンはナフサと呼ばれる粗製ガソリンで，引火点は18度程度，常温なら小さな火花さえあれば，すぐ引火する危険なものであった．火災が発生し1日以上燃え続け，ナフサが燃え尽きてやっと鎮火した．以上は参考文献1) の要約である．

このときの揺れは，人がほとんど感じることのない，ゆっくりした揺れであった．にも関わらず，タンクは大きく共振したのであった．なぜそんなことが起きるのか，それが以下考える問題である．

地震の影響を見るために，バネでいくつかのおもりをつないだ複合バネの揺れを調べる．具体的には，おもりの一つ一つを建物の一つのフロアーに対応させて考える．だから，一番単純なのは，1階建ての（つまり平屋の）1戸建てワンルーム，上の石油タンクはこのモデルに当てはまる．これが「自明でない最初の場合」である．

この簡単なモデルを調べると，共振のために振幅が無限に大きくなり，建物の崩壊や亀裂の可能性のあることがよく納得できる．詳細は中村郁『線形代数学』（数学書房，2007年）を参照していただくとして，ここでは結果のみ要約する．

5. 地震と建物の振動

図3のように固定された土台（図で壁のように見える部分）に取り付けられた質点（または，おもり）のバネを考える．家が揺れると元に戻ろうとする，その性質を単純にバネとみなしてモデル化するのである．その場合，家屋も単純化して1点に質量が集中した質点とみなす．

質点の座標 $x(t)$ は，地震波のもとでは t の関数としてどんな関数になるか，求めてみよう．その関数はもちろんおもりの運動を，したがって，家屋の揺れ動く様子を記述する．地震の波は正弦波 $\sin \omega t$ とすると，適当な正の定数 β を選べば，方程式は次のようになる：

$$x''(t) + \beta^2 x(t) = A_0 \sin \omega t, \tag{3}$$

$$x(0) = x'(0) = 0. \tag{4}$$

この微分方程式は簡単に解くことができて，解は次で与えられることがわかる：

$$x(t) = \frac{\omega A_0}{\beta^2 - \omega^2}\left(\frac{\sin \omega t}{\omega} - \frac{\sin \beta t}{\beta}\right). \tag{5}$$

ここからが問題の核心である．家屋の固有振動数が地震波の周波数に近い，つまり，β が ω に近い，としよう．そこで $\beta \to \omega$ の極限を調べることにする．

$$G(\lambda) = \frac{\sin \lambda t}{\lambda}$$

とおいて，$u(t) := \lim_{\beta \to \omega} x(t)$ を計算すると，

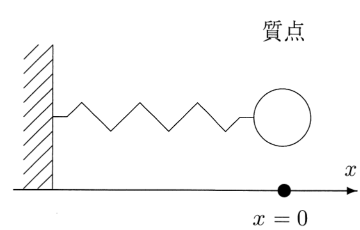


図3　ひとつのバネ．

$$u(t)=\lim_{\beta\to\omega}\frac{\omega A_0}{\beta+\omega}\cdot\frac{(-1)}{\beta-\omega}(G(\beta)-G(\omega))$$
$$=\frac{(-A_0)}{2}\cdot\left(\frac{\partial G}{\partial\lambda}\right)(\omega)$$
$$=\frac{(-A_0)}{2\omega^2}(\omega t\cos\omega t-\sin\omega t)$$

となる．$\beta=\omega$ のとき，関数 $u(t)$ も (3) と (4) を満たす．右辺の絶対値（振幅）$|u(t)|$ の最大値は，ほぼ

$$\max|u(t)|\fallingdotseq\frac{|A_0|}{2}\frac{|t|}{\omega}$$

に等しく，時間の経過とともに無限に増大する．これは建物の亀裂か崩壊につながるであろう．

6. テータ関数

最初の節で触れた楕円曲線に戻る．アーベル多様体は楕円曲線の高次元への自然な一般化である．アーベル多様体の同型類を適当に整理して並べた集合が，アーベル多様体のモジュライ空間である．この集合が代数多様体になるように理論を工夫する，その理論をモジュライ理論と言う．数学におけるその歴史は古く，その源流は 19 世紀リーマンにまでさかのぼる．

この理論（の発展形）には，現在でもなお様々な問題が残されているが，1 次元レベル 3 が「自明でない最初の場合」である．ここでは，その場合にテータ関数の関係式を求めてみたい．

第 1 節の楕円曲線の座標を $w=e^{2\pi iz}$ として，

$$E(\omega)=\mathbf{C}/(\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\omega)=\mathbf{C}^*/w\mapsto wq^6\text{で同一視}$$

とする，ただし，$q=e^{2\pi i\omega/6}$ である．このとき，$E(\omega)$ 上のテータ関数を $k=0,1,2$ に対して

$$\theta_k:=\theta_k(\omega,z)=\sum_{m\in\mathbf{Z}}q^{(k+3m)^2}w^{k+3m}$$

と定め，写像 Θ を以下のように定義する：

$$\Theta:E(\omega)\ni z\mapsto[x_0,x_1,x_2]=[\theta_0,\theta_1,\theta_2]\in\mathbf{P}^2.$$

この写像により，$E(\omega)$ は 2 次元射影空間 $\mathbf{P}^2$ に埋め込まれる．この像は 3 次曲線になる．

問題． Θ の像の方程式を具体的に与えよ．

この問題は直接やってもできそうだが，意外とそうでもない．そこで迂回する．

まず第一に，次の変換法則を満たす，ただし $\zeta_3=e^{2\pi\sqrt{-1}/3}$ とする：

$$\begin{aligned}\theta_k\left(\omega,z+\frac{1}{3}\right)&=\zeta_3^k\theta_k(\omega,z),\\ \theta_k\left(\omega,z+\frac{\omega}{3}\right)&=(qw)^{-1}\theta_{k+1}(\omega,z).\end{aligned}\tag{6}$$

したがって，もちろん次の変換公式も満たす：

$$\theta_k(\omega,z+1)=\theta_k(\omega,z),$$
$$\theta_k(\omega,z+\omega)=q^{-9}w^{-3}\theta_k(\omega,z).$$

後者の関係式によって，写像 Θ は確かに $E(\omega)$ からの写像である．(6) により，

$$[\theta_0,\theta_1,\theta_2]\left(\omega,z+\frac{1}{3}\right)=[\theta_0,\zeta_3\theta_1,\zeta_3^2\theta_2](\omega,z),$$
$$[\theta_0,\theta_1,\theta_2]\left(\omega,z+\frac{\omega}{3}\right)=[\theta_1,\theta_2,\theta_0](\omega,z).$$

射影空間の点は 3 つの座標の比（という約束）なので，等式 (6) から 2 番目の等式が得られる．これらは $\mathbf{P}^2$ の座標 x_k の線形変換を引き起こす：

$$\sigma(x_k)=\zeta_3^kx_k,\quad\tau(x_k)=x_{k+1},\quad(k=0,1,2)$$

ただし，$x_3=x_0$ と約束する．

そこで，この 2 つの線形変換によって不変な 3 次式をすべて探してみる．σ,τ で不変だから，結局

$$x_0^3+x_1^3+x_2^3,\quad x_0x_1x_2$$

の和となる．したがって，Θ の像は，（ω に依存する）適当な定数 A,B を選んで

$$A(x_0^3+x_1^3+x_2^3)+Bx_0x_1x_2=0\tag{7}$$

となる（であろう）．しかし，この「推論」も結論も正しいのはレベル 3 の場合だけで，レベル 4 ではもはや正しくない．それは，曲線 C の定義式が不変式でなくても，$\sigma(C)=C$, $\tau(C)=C$ となる場合があるからである．例えば，次の節の 3 次式 $f_{i,j}$ は $f_{0,0}$ 以外は $G(3)$ で不変ではないが，3 次曲線 $C_{i,j}:f_{i,j}=0$ は $G(3)$ で不変である．

7. $G(3)$ の表現論

3×3 行列 σ,τ によって生成される群を $G(3)$ とする．σ,τ は行列表示すればそれぞれ，

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\zeta_3&0\\0&0&\zeta_3^2\end{pmatrix},\quad \tau=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

となるから計算で $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}=\zeta_3 I_3$ が分かる．したがって，$G(3)$ の位数（要素の個数）は 27 である．

群 $G(3)$ から行列のなす群への準同型を表現という．例えば，$G(3)$ はもともと 3×3 行列のなす群だから，恒等写像（$G(3)$ の要素にその要素を対応させる写像）は一つの表現である．行き先が 3×3 行列なので，これは 3 次元表現と言う．この表現をここでは ρ と書く．わずらわしいが今後の表記のために繰り返すと，$\rho(g)=g$ である．次に $\rho^\vee$（ρ の双対という）を

$$\rho^\vee(g)={}^t\rho(g)^{-1}={}^tg^{-1}$$

と定義する．$\rho^\vee$ も $G(3)$ の表現となるが，行き先が 3×3 行列なので，これも 3 次元表現である．

同じ次数の表現 ψ,ϕ が与えられたとき，ある可逆な行列 A が存在して，すべての $g\in G$ に対し

$$\psi(g)=A\phi(g)A^{-1}$$

が成り立つとき，2 つの表現は同値と呼ぶ．

表現は行き先が行列だから，そのトレース（対角成分の和）をとることができる，これを表現の指標と呼ぶ．表現 ρ の指標はすぐ計算できる：

$$\mathrm{Tr}\,\rho(aI_3)=3a\quad (a^3=1),$$
$$\mathrm{Tr}\,\rho(\sigma)=1+\zeta_3+\zeta_3^2=0,\quad \mathrm{Tr}\,\rho(\tau)=0.$$

一方，表現 $\rho^\vee$ の指標は定義より

$$\mathrm{Tr}\,\rho^\vee(aI_3)=\mathrm{Tr}\,\rho(a)^{-1}=3a^2\quad (a^3=1),$$
$$\mathrm{Tr}\,\rho^\vee(\sigma)=\mathrm{Tr}\,\rho^\vee(\tau)=0.$$

同値な表現のトレースは等しいから，ρ と $\rho^\vee$ は G の表現として同値でない．また，$G(3)$ を可換化した群は，σ,τ の像から生成される，位数 9 のアーベル群 ($\simeq \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$) だから，$G(3)$ の 1 次元表現は次の ρ_{ij} の一つと一致する：

$$\rho_{ij}(aI_3)=1,\quad \rho_{ij}(\sigma)=\zeta_3^i,\quad \rho_{ij}(\tau)=\zeta_3^j$$

表 1　$G(3)$ の指標．

	aI_3 $(a^3=1)$	σ	τ
ρ_{ij}	1	ζ_3^i	ζ_3^j
χ	$3a$	0	0
$\chi^\vee$	$3a^2$	0	0

ただし，$\chi=\mathrm{Tr}(\rho)$，$\chi^\vee=\mathrm{Tr}(\rho^\vee)$，$\zeta_3=e^{2\pi i/3}$．

計算結果を表 1 にまとめる．以上により $G(3)$ の 1 次元表現 9 個，3 次元表現 2 個が見つかったが，この結果，関係式

$$|G(3)|=27=9\cdot 1^2+3^2+3^2$$

が成立する．一般論により，$G(3)$ の既約表現（自分自身より小さい部分表現を持たないもの）は，同値の差を除いて，上に挙げた ρ_{ij}, ρ, $\rho^\vee$ のどれかと一致する．

8. 3 次対称テンソル表現とその分解

$G(3)$ の表現 ρ の表現空間は，ベクトル空間

$$V=\mathbf{C}x_0+\mathbf{C}x_1+\mathbf{C}x_2$$

である．したがって，多項式環 $\mathbf{C}[x_0,x_1,x_2]$ への表現を自然に引き起こす．特に，3 次式全体の空間 S^3V に群 $G(3)$ の表現 $\psi:=S^3\rho$ を引き起こす：

$$\psi(g)(x_0^ax_1^bx_2^c)=\rho(g)(x_0)^a\rho(g)(x_1)^b\rho(g)(x_2)^c.$$

具体的な計算により，

$$\mathrm{Tr}\,\psi(a)=10a^3,\ \mathrm{Tr}\,\psi(\sigma)=\mathrm{Tr}\,\psi(\tau)=1,$$
$$\mathrm{Tr}\,\psi=2\rho_{00}+\sum_{(i,j)\neq(0,0)}\rho_{ij}.$$

この結果，$\psi=S^3\rho$ は $G(3)$ の表現として

$$S^3\rho=\rho_{00}\oplus\rho_{00}\oplus\sum_{(i,j)\neq(0,0)}\rho_{ij}\tag{8}$$

と分解されることが分かる．具体的には，

$$f_\infty = x_0 x_1 x_2,$$
$$f_{0,k} = x_0^3 + \zeta_3^{-k} x_1^3 + \zeta_3^{-2k} x_2^3,$$
$$f_{1,k} = x_0^2 x_1 + \zeta_3^{-k} x_1^2 x_2 + \zeta_3^{-2k} x_2^2 x_0,$$
$$f_{2,k} = x_0 x_1^2 + \zeta_3^{-k} x_1 x_2^2 + \zeta_3^{-2k} x_2 x_0^2$$
$$(k = 0, 1, 2)$$

と定めると

$$\psi(\sigma)(f_{i,j}) = \zeta_3^i f_{ij}, \psi(\tau)(f_{i,j}) = \zeta_3^j f_{ij}$$

となる．したがって，$f_{i,j}$ は 1 次元表現 $\rho_{i,j}$ を与え，

$$S^3V = (\mathbf{C}f_\infty \oplus \mathbf{C}f_{0,0}) \oplus \bigoplus_{(i,j)\neq(0,0)} \mathbf{C}f_{i,j}$$

となる．これが (8) の意味するところである．

9. 問題の答

表現の分解 (8) により，$G(3)$ で不変な曲線は，(7) 以外は

$$C_{ij} : f_{i,j} = 0, \quad (i,j) \neq (0,0)$$

の 8 個に限られることがわかる．複素トーラス $E(\omega)$ は ω が違えば「異なる」．だから，パラメーターを含んでいない $f_{i,j}$ だけで表すことはできない．逆に，$E(\omega)$ は連続パラメーター ω でつながっているので，A, B を変化させれば，すべて一斉に (7) の形で表すことができる．言い換えれば，θ_k は一斉に (7) の形の等式を満たす：

$$A(\theta_0^3 + \theta_1^3 + \theta_2^3) + B\theta_0\theta_1\theta_2 = 0.$$

この結果は，アーベル多様体のモジュライ理論の研究に $G(3)$ の類似の群の表現論が役立つだろう，と予感させるに十分である．

参考文献

1)　堀郁夫・川端鋭憲，「地震による石油タンク火災の技術的考察と社会問題」，社会技術研究論文集 Vol.**2**, pp.414–424 (2004) (`http://shakai-gijutsu.org/vol2/2_414.pdf`).

（なかむら・いく，北海道大学名誉教授）

微積分 3

数学系の微積分

海 老 原　円・太 田　雅 人

この連載では，これまで主に数学系以外の専攻の入試問題を中心に取り上げてきたが，今回は少し趣を変えて，数学系の専攻の入学試験で出題された，微積分の問題をいくつか取り上げてみたい．著者らの専門は数学であり，担当する講義も数学科の学生を対象としたものが多い．そのため，理学部の数学科以外の学科や工学部などでどのような数学が講義されているか，それほど詳しくなく，この連載を通して初めて知ったことも多い．これは逆の場合もあるのではないか，すなわち，数学を専門としない読者にとっては，数学科でどのような数学が講義されているか，知る機会はそれほど多くはないのではないかと考え，今回，このようなテーマを選んでみた．前半は**2変数関数の極値問題**を，後半は**一様収束**と**一様連続**に関する問題を取り上げる．興味を持っていただければ幸いである．

10.1 極値問題

まずは，2 変数関数の極値問題から始めよう．これは数学系に限らず，理工系では共通して学ぶ内容であろう．

> **問題** 10.1　(東京大学大学院数理科学研究科数理科学専攻，平成 24 年度)　2 変数関数 $f(x,y)=\dfrac{x+y}{(x^2+1)(y^2+1)}$ について，以下の問いに答えよ．
>
> (1)　領域 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$ における $f(x,y)$ の最大値を求めよ．
>
> (2)　平面 $\mathbb{R}^2$ における $f(x,y)$ の最大値を求めよ．

解答例　以下，関数 f の偏微分を f_x, f_y のように添字を用いて表す．

まず，$f(x,y)$ の極値をとる点の候補である，**停留点**（**臨界点**ともいう），すなわち，

$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ を満たす点 (a,b) を求める．$f(x,y)$ を偏微分すると

$$f_x(x,y)=\frac{1-2xy-x^2}{(x^2+1)^2(y^2+1)},\quad f_y(x,y)=\frac{1-2xy-y^2}{(x^2+1)(y^2+1)^2}$$

だから，$f_x(x,y)=f_y(x,y)=0 \iff x^2+2xy=y^2+2xy=1$．これから，$f(x,y)$ の停留点は $(x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ の 2 点であり，

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{8},\quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{8} \tag{10.1}$$

となる．次に，小問 (1) で与えられた領域の境界における $f(x,y)$ の値を調べる．

$$f(x,0)=\frac{x}{x^2+1},\quad f_x(x,0)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2}$$

および y に関する同様の計算により

$$f(x,0)\le f(1,0)=\frac{1}{2}\quad(x\ge 0),\quad f(0,y)\le f(0,1)=\frac{1}{2}\quad(y\ge 0) \tag{10.2}$$

となる．また，$f(x,1)=\dfrac{x+1}{2(x^2+1)}$,

$$f_x(x,1)=\frac{1-2x-x^2}{2(x^2+1)^2}=\frac{(-1+\sqrt{2}-x)(1+\sqrt{2}+x)}{2(x^2+1)^2}$$

および y に関する同様の計算により

$$\begin{aligned} f(x,1)&\le f(-1+\sqrt{2},1)=\frac{1+\sqrt{2}}{4}\quad(x\ge 0),\\ f(1,y)&\le f(1,-1+\sqrt{2})=\frac{1+\sqrt{2}}{4}\quad(y\ge 0)\end{aligned} \tag{10.3}$$

が成り立つ．ここで，

$$\frac{1}{2}<\frac{1+\sqrt{2}}{4}<\frac{3\sqrt{3}}{8} \tag{10.4}$$

に注意する．以上の準備のもとで，小問 (1), (2) について考える．

(1) まず，関数 f は有界閉集合 $K:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$ 上で連続だから，**Weierstrass の最大値定理**により，f は K において最大値をとる．(10.2), (10.3), (10.4) より，K の境界上では，$f(x,y)\le\dfrac{1+\sqrt{2}}{4}$ であり，さらに，(10.1) より，K における f の最大値をとる点は K の境界上には存在せず，K の内部に存在する．そのような点は f の停留点となるが，K の内部には f の停留点は $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 以外には存在しないので，(10.1) より，K における f の最大値は $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ であることが分かる．

(2) $x\ge 1,\ y\ge 0$ に対して

$$f_x(x,y)=\frac{1-2xy-x^2}{(x^2+1)^2(y^2+1)}\le\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2(y^2+1)}\le 0$$

だから，(10.3) より

$$f(x,y) \leq f(1,y) \leq \frac{1+\sqrt{2}}{4} \quad (x \geq 1,\ y \geq 0)$$

が成り立つ．同様に

$$f(x,y) \leq f(x,1) \leq \frac{1+\sqrt{2}}{4} \quad (x \geq 0,\ y \geq 1)$$

となるから，第 1 象限 $\{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$ における f の最大値は，小問 (1) で求めた集合 K における f の最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ に等しい．さらに，$x \geq 0, y \geq 0$ に対して，$f(x,-y) \leq f(x,y)$, $f(-x,y) \leq f(x,y)$, $f(-x,-y) \leq 0$ だから，平面 $\mathbb{R}^2$ における f の最大値は $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ である． **解答終わり**

次は**陰関数**の極値に関する問題である．

> **問題** 10.2 （九州大学大学院数理学府，平成 22 年度） a を実数の定数とし，なめらかな 2 変数関数 $z = f(x,y)$ が
>
> $$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^3 - axyz + 2a(x+y) = 4a + 2, \\ f(1,1) = 0 \end{cases}$$
>
> を満たしているとする．関数 $f(x,y)$ が $(x,y) = (1,1)$ で極値をもつための a の条件を求め，そのとき $f(x,y)$ が極大値をとるか極小値をとるか判定せよ．

解答例 関数 $z = f(x,y)$ が満たす方程式を x と y に関して偏微分すると

$$\begin{aligned} &2x + 3f(x,y)^2 f_x(x,y) - ayf(x,y) - axyf_x(x,y) + 2a = 0, \\ &2y + 3f(x,y)^2 f_y(x,y) - axf(x,y) - axyf_y(x,y) + 2a = 0 \end{aligned} \tag{10.5}$$

となる．(10.5) に $(x,y) = (1,1)$ を代入すると，$f(1,1) = 0$ だから

$$2 - af_x(1,1) + 2a = 0, \quad 2 - af_y(1,1) + 2a = 0 \tag{10.6}$$

を得る．ここで，$f(x,y)$ が $(x,y) = (1,1)$ で極値をもつとすると，$f_x(1,1) = f_y(1,1) = 0$ だから，(10.6) より，$a = -1$ となる．よって，関数 $f(x,y)$ が $(x,y) = (1,1)$ で極値をもつための a の必要条件は $a = -1$ である．

次に，(10.5) において $a = -1$ とし，さらに偏微分すると

$$\begin{aligned} &2 + 6f(x,y)f_x(x,y)^2 + 3f(x,y)^2 f_{xx}(x,y) + 2yf_x(x,y) + xyf_{xx}(x,y) = 0, \\ &2 + 6f(x,y)f_y(x,y)^2 + 3f(x,y)^2 f_{yy}(x,y) + 2xf_y(x,y) + xyf_{yy}(x,y) = 0, \\ &6f(x,y)f_x(x,y)f_y(x,y) + 3f(x,y)^2 f_{xy}(x,y) \\ &\qquad\qquad + f(x,y) + xf_x(x,y) + yf_y(x,y) + xyf_{xy}(x,y) = 0 \end{aligned}$$

となる．ここで，$(x,y) = (1,1)$ を代入すると，$f(1,1) = f_x(1,1) = f_y(1,1) = 0$ だから，$f_{xx}(1,1) = f_{yy}(1,1) = -2$, $f_{xy}(1,1) = f_{yx}(1,1) = 0$ を得る．よって，**Taylor の定理**により，$(x,y) = (1,1)$ のまわりで

$$f(x,y) = f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1)$$

$$+\frac{1}{2}\left\{f_{xx}(1,1)(x-1)^2+2f_{xy}(1,1)(x-1)(y-1)+f_{yy}(1,1)(y-1)^2\right\}$$
$$+o\left((x-1)^2+(y-1)^2\right)$$
$$=f(1,1)-(x-1)^2-(y-1)^2+o\left((x-1)^2+(y-1)^2\right)$$

と展開される．ここで，$o\left((x-1)^2+(y-1)^2\right)$ は **Landau の記号**であり，

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{o\left((x-1)^2+(y-1)^2\right)}{(x-1)^2+(y-1)^2}=0$$

を満たす関数を表す．

よって，$\delta>0$ を十分小さくとれば，$0<\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}<\delta$ のとき，$f(x,y)<f(1,1)$ となり，$f(x,y)$ は $(x,y)=(1,1)$ で極大値をとる．　**解答終わり**

この節の最後に，**条件付き極値問題**について考えよう．

問題 10.3（筑波大学大学院数理物質科学研究科数学専攻，平成 22 年度）2 つの実数の組 (a,b) に対して，$F(a,b)$ を次のように定める．

$$F(a,b)=\int_{D(a,b)}\sqrt{1-e^a x^2-e^b y^2}\,dx\,dy$$

ここで $D(a,b)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid e^a x^2+e^b y^2\leq 1\}$ である．

(1)　$F(a,b)$ を求めよ．
(2)　条件 $a^2+b^2=1$ のもとで，$F(a,b)$ の最大値と最小値を求めよ．

解答例　(1) $x=e^{-a/2}r\cos\theta,\ y=e^{-b/2}r\sin\theta$ $(0\leq r\leq 1,\ 0\leq\theta\leq 2\pi)$ と変数変換し，計算すると

$$F(a,b)=2\pi e^{-(a+b)/2}\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,r\,dr$$
$$=2\pi e^{-(a+b)/2}\left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{3/2}\right]_0^1=\frac{2\pi}{3}e^{-(a+b)/2}.$$

(2) 単位円周 $a^2+b^2=1$ は $(a,b)=(\cos\theta,\sin\theta)$ $(0\leq\theta\leq 2\pi)$ とパラメータ表示できるから，1 変数関数

$$f(\theta):=F(\cos\theta,\sin\theta)=\frac{2\pi}{3}e^{-(\cos\theta+\sin\theta)/2}\quad(0\leq\theta\leq 2\pi)$$

の最大値と最小値を求めればよい．さらに，$f(\theta)$ は狭義増加関数 $g(t)=\dfrac{2\pi}{3}e^{t/2}$ と関数 $t=h(\theta):=-\cos\theta-\sin\theta$ の合成関数だから，区間 $[0,2\pi]$ において $h(\theta)$ の最大値と最小値を求めればよい．途中の計算は省略するが，$h(\theta)$ は，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最小値 $-\sqrt{2}$ をとり，$\theta=\dfrac{5\pi}{4}$ のとき最大値 $\sqrt{2}$ をとる．よって，条件 $a^2+b^2=1$ のもとで，$F(a,b)$ の最大値は $\dfrac{2\pi}{3}e^{1/\sqrt{2}}$，最小値は $\dfrac{2\pi}{3}e^{-1/\sqrt{2}}$ である．　**解答終わり**

小問 (2) の別解として，**Lagrange の未定乗数法**を用いた解法も考えられるが，詳細は省略する．

10.2 一様収束と一様連続

この節では，関数列の**一様収束性**と関数の**一様連続性**について考える．どちらも微分積分学の発展の過程で必然的に現れた重要な概念であるが，数学系の学科以外では，詳しく講義される機会は少ないかもしれない．

まず，関数列の各点収束と一様収束の定義を述べる．

定義 10.1　$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は区間 I 上の実数値の関数列，f は I 上の実数値関数とする．

(1)　すべての $x \in I$ に対して，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ が成り立つとき，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に I 上で**各点収束**するという．

(2)　$\lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in I\} = 0$ が成り立つとき，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に I 上で**一様収束**するという．

ここで，実数全体 $\mathbb{R}$ の部分集合 A に対して，$\sup A$ はその**上限**を表す．上限については，その語感から感覚的に捉えていただければ十分であると思うが，定義をかけば，$\sup A = \min\{M : A \subset (-\infty, M]\}$ となる．集合 $\{M : A \subset (-\infty, M]\}$ が空でないとき，その最小元が存在することは，**実数の公理**の1つ（またはそれと同値な命題）であり，これを認めるところから，大学の（数学科の）微分積分学は始まる．また，$\{M : A \subset (-\infty, M]\}$ が空集合のときは，$\sup A = \infty$ と定める．

さて，定義 10.1 は少し分かりにくいと思うので，言い換えてみよう．$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に I 上で各点収束するとは，各 $x \in I$ をとるごとに，実数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 $f(x)$ に収束するということである．一方，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に I 上で一様収束するとは，各 n に対して，$|f_n(x) - f(x)| \leq M_n$ $(x \in I)$ を満たす，$x \in I$ に依らない実数 M_n を選び，その実数列 $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束するようにできるということである．

定義から，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に区間 I 上で一様収束すれば，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に I 上で各点収束するが，逆は一般には成り立たない．また，次の定理が成り立つ．

定理 10.1　$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は区間 I 上の連続関数列とする．このとき，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が関数 f に I 上で一様収束すれば，f は I で連続である．

以上の準備のもとで，次の問題を考えてみよう．

問題 10.4　（京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻，平成 21 年度）　閉区間 $[0,1]$ 上の函数 f_n を $f_n(x) = x(1-x)^n$ $(x \in [0,1])$ で定める．

(1)　函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $[0,1]$ 上一様収束することを示せ．

(2)　函数列 $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ は $[0,1]$ 上一様収束しないことを示せ．ただし，f_n' は f_n の導函数とする．

解答例　(1) f_n を微分すると

$$f_n'(x) = (1-x)^n - nx(1-x)^{n-1} = \{1-(n+1)x\}(1-x)^{n-1}$$

となる．よって，f_n は $x = \dfrac{1}{n+1}$ で最大値をとり，すべての $x \in [0,1]$ に対して

$$0 \leq f_n(x) \leq f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \frac{1}{n+1}$$

が成り立ち，関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は定数関数 0 に区間 $[0,1]$ 上で一様収束する．

(2) 区間 $[0,1]$ 上の関数 g を $g(0) = 1$, $g(x) = 0$ $(x \in (0,1])$ で定めると，関数列 $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ は関数 g に区間 $[0,1]$ 上で各点収束する．ここで，関数列 $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ がある関数に $[0,1]$ 上で一様収束したと仮定すると，その極限関数は g に等しい．さらに，各 n に対して，f_n' は区間 $[0,1]$ で連続だから，定理 10.1 より，g は $[0,1]$ で連続であるが，一方，はじめに定めた関数 g は $[0,1]$ で連続でないので，これは矛盾である．ゆえに，関数列 $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ は区間 $[0,1]$ 上一様収束しない．　**解答終わり**

次に，関数の連続性と一様連続性の定義を述べる．連続性は，いわゆる **ε–δ 形式**を用いなくても定義することはできるが，一様連続性はこれを用いずに定義することは難しい．

定義 10.2　f は区間 I 上の関数とする．

(1)　$a \in I$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，a と ε に応じて，正定数 $\delta = \delta(a, \varepsilon)$ を選び，$x \in I$, $|x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つようにできるとき，関数 f は**点 a において連続**であるという．また，f が I のすべての点において連続であるとき，f は**区間 I で連続**であるという．

(2)　任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ε のみから定まる，ある正定数 $\delta = \delta(\varepsilon)$ をとり，$x, y \in I$, $|x - y| < \delta$ ならば $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ が成り立つようにできるとき，関数 f は**区間 I で一様連続**であるという．

定義から，関数 f が区間 I で一様連続であれば，f は I で連続であるが，逆は一般には成り立たない．例えば，$f(x) = \dfrac{1}{x}$ は区間 $(0,1]$ で連続であるが，$(0,1]$ で一様連続ではない．一方，**有界閉区間上の連続関数はその区間上で一様連続である**．この事実は「**有界閉区間上の連続関数はリーマン積分可能である**」という基本的な定理の証明で本質的な役割を果たす．すなわち，普段何気なく使っている，連続関数の定積分も一様連続性の概念なしには，一般的に論じることはできないのである．

また，関数 f が I で微分可能で，その導関数 f' が I で連続かつ有界であれば，f は I で一様連続となる．実際，ある定数 $M > 0$ に対して，$|f'(t)| \leq M$ $(t \in I)$ とすると，すべての $x, y \in I$ に対して，

$$|f(x) - f(y)| = \left|\int_y^x f'(t)\,dt\right| \leq \left|\int_y^x |f'(t)|\,dt\right| \leq M|x - y|$$

が成り立つ（このとき，f は I で **Lipschitz 連続**であるという）．よって，$\varepsilon > 0$ に対して，$\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$ ととれば，$|x - y| < \delta$ のとき，$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ となり，f は I で一様連続である．

前置きが長くなったが，次の問題を考えよう．

問題 10.5 （東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻，平成 24 年度） $[0, \infty)$ 上で定義された非負連続関数 f で

$$(*) \quad \int_0^\infty f(x)\,dx < \infty$$

となるものを考える．

(1) $x_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, $f(x_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ となる $\{x_n\}$ が存在することを示せ．

(2) $(*)$ を満たし，$x \to \infty$ のとき 0 に収束しないような f の例をあげよ．

(3) f が $(*)$ を満たし，$[0, \infty)$ 上で一様連続ならば $f(x) \to 0$ $(x \to \infty)$ が成り立つことを示せ．

解答例 (1) $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，$I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,dx$ とおく．このとき，$(*)$ より，$\displaystyle\sum_{n=0}^\infty I_n = \int_0^\infty f(x)\,dx < \infty$ だから，数列 $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ は 0 に収束する．また，関数 f は有界閉区間 $[n, n+1]$ において連続だから，最小値を与える点が存在する．各 n に対して，そのような点を 1 つとり，x_n と定める．このとき，$x_n \in [n, n+1]$ だから，$x_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ である．また，$f(x_n) \le f(x)$ $(x \in [n, n+1])$ だから

$$0 \le f(x_n) = \int_n^{n+1} f(x_n)\,dx \le \int_n^{n+1} f(x)\,dx = I_n$$

が成り立ち，$f(x_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ となる．

(2) $\varphi(x) = \max\{1 - |x|^2, 0\}$ とし，$f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^\infty \varphi\left(n^2(x-n)\right)$ と定める（f のグラフは底辺の長さ $\dfrac{1}{2n^2}$，高さ 1 の二等辺三角形が並んだ形をしている）．このとき，f は区間 $[0, \infty)$ 上で非負かつ連続であり

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^2} < \infty$$

となり，$(*)$ を満たす．また，すべての $n = 2, 3, \ldots$ に対して $f(n) = 1$ だから，$x \to \infty$ のとき f は 0 に収束しない．

(3) $\varepsilon > 0$ を任意にとる．関数 f が区間 $[0, \infty)$ 上で一様連続であることから，ε のみから定まる，ある正定数 $\delta > 0$ がとれて，$x, y \in [0, \infty)$ に対して，

$$|x - y| \le \delta \ \text{ ならば } \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon \tag{10.7}$$

が成り立つ．この δ と $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，$a_n = n\delta$ とおく．このとき，関数 f は有界閉区間 $[a_n, a_{n+1}]$ で連続だから，**積分の平均値の定理**より

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx = f(c_n)(a_{n+1} - a_n) = \delta f(c_n)$$

を満たす $c_n \in [a_n, a_{n+1}]$ が存在する．また，$(*)$ より

$$\delta\sum_{n=0}^{\infty}f(c_n)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}f(x)\,dx=\int_0^{\infty}f(x)\,dx<\infty$$

だから，$f(c_n)\to 0$ $(n\to\infty)$ が成り立つ．よって，はじめにとった ε に応じて，ある自然数 n_0 が定まり，$n\geq n_0$ のとき $0\leq f(c_n)<\varepsilon$ となる．これから，$x\in[a_{n_0},\infty)$ のとき，$x\in[a_n,a_{n+1})$ となる自然数 n に対して，(10.7) より

$$|f(x)|\leq|f(x)-f(c_n)|+|f(c_n)|<2\varepsilon$$

となる．ゆえに，$f(x)\to 0$ $(x\to\infty)$ が成り立つ．　**解答終わり**

最後に，一様連続と一様収束の両方に関連した問題を取り上げる．

問題 10.6　(大阪大学大学院理学研究科数学専攻，平成 22 年度)

(1)　$f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の一様連続関数とする．$\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が関数 $g(x)$ に $\mathbb{R}$ 上一様収束するとき，関数列 $\{f(g_n(x))\}_{n=1}^{\infty}$ は，関数 $f(g(x))$ に $\mathbb{R}$ 上一様収束することを示せ．

(2)　関数項級数 $h(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kx)}{k^2}$ が $\mathbb{R}$ 上一様収束することを示し，関数列

$$\alpha_n(x)=\sin\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(kx)}{k^2}\right),\quad n=1,2,3,\ldots$$

が，関数 $\sin(h(x))$ に $\mathbb{R}$ 上一様収束することを示せ．

解答例　(1) $\varepsilon>0$ を任意にとる．関数 f は $\mathbb{R}$ 上で一様連続だから，ε に応じて，ある定数 $\delta>0$ が定まり，$s,t\in\mathbb{R}$ に対して

$$|s-t|<\delta \text{ ならば } |f(s)-f(t)|<\varepsilon \tag{10.8}$$

が成り立つ．また，関数列 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ が関数 g に $\mathbb{R}$ 上で一様収束することから，δ に応じて，ある自然数 n_0 が定まり，$n\geq n_0$ ならば $\sup\{|g_n(x)-g(x)|:x\in\mathbb{R}\}<\delta$ が成り立つ．よって，$n\geq n_0$ のとき，すべての $x\in\mathbb{R}$ に対して，$|g_n(x)-g(x)|<\delta$ が成り立つので，(10.8) より，$|f(g_n(x))-f(g(x))|<\varepsilon$ となる．ここで，n_0 は $x\in\mathbb{R}$ に依らず，ε のみから決まっているので，関数列 $\{f(g_n(x))\}_{n=1}^{\infty}$ は関数 $f(g(x))$ に $\mathbb{R}$ 上一様収束する．

(2) まず，すべての $x\in\mathbb{R}$ に対して $\left|\dfrac{\cos(kx)}{k^2}\right|\leq\dfrac{1}{k^2}$ であり，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\infty$ だから，**Weierstrass の M 判定法**により，関数項級数 $h(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kx)}{k^2}$ は $\mathbb{R}$ 上一様収束する．また，$f(t)=\sin t$ $(t\in\mathbb{R})$ とおくと，すべての $t\in\mathbb{R}$ に対して $|f'(t)|\leq 1$ だから，定義 10.2 の後に述べた注意により，f は $\mathbb{R}$ 上 Lipschitz 連続となり，f は $\mathbb{R}$ 上で一様連続である．よって，小問 (1) より，関数列 $\{\alpha_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は $\sin(h(x))$ に $\mathbb{R}$ 上一様収束する．　**解答終わり**

今回はここまでにしよう．次回は，確率に関する問題を取り扱う．

（えびはら・まどか，埼玉大学大学院理工学研究科）
（おおた・まさひと，東京理科大学理学部）

科学と社会

Science & Society

第17回　国家・学問・戦争の諸相

量子力学が意味したもの (2)

日本の場合

岡本　拓司

前回は，1920 年代後半に誕生した量子力学が，第一次大戦後のアメリカでどのような進展を遂げたかを論じた．亡命知識人の大西洋を挟んだ移動や，第二次大戦中の科学動員もあって，アメリカの物理学界は量子力学の発展と並行して成長したかのような印象を与えるが，この新理論の登場を契機として世界の科学界において重要な位置を占めるようになるのは，日本の物理学もまた同様であった．1927 年までライデンにいた理論物理学者のユーレンベック（George Eugene Uhlenbeck, 1900–1988）は，理論研究が活発でない時期の『フィジカル・レヴュー』（*Physical Review*）誌を，「日本語の雑誌のようにおかしな（funny）雑誌」であると考えていたという[1)]．実際には，1925 年頃までには，アメリカの雑誌もヨーロッパの研究者の関心を引くようになっていたが，同国では，理論研究におけるめぼしい成果は，量子電気力学の確立に至るまで現れなかった[2)]．一方，日本では 1934 年に湯川秀樹（1907–1981）の中間子論が発表され，以後，戦後に至るまでの理論物理学の伝統が築かれることとなる．

今回は，ヨーロッパで生れた新たな理論が，戦前期の日本の物理学界の発展とどのように関わったかを検討する．

17.1 日本における初期の量子論の紹介と研究

第 14 回で記したとおり，東北帝国大学理科大学創設に向けた準備のため，明治 43 年（1910 年）にヨーロッパを視察していた長岡半太郎（1865–1950）は，特殊相対論（1905 年）などの議論で賑わう物理学界の様子を日本に伝え，自国の物理学者たちの奮起を促していた．長岡は帰国後も西洋の物理学界の動向を紹介し続けたが，その話題は，次第に相対論から量子論へと移っていった．これは，一般相対論の発表（1915 年）とその検証（1919 年）の前の，物理学者の関心の推移をよく反映している[3)]．

量子論が新たな研究を生み出し得る領域は広く，長岡自身の研究にも関わっていた．1913 年にボーア（Niels Henrik David Bohr, 1885–1962）が量子論的な原子模型を発表すると，長岡は，正の電荷を持つ原子核とそれを取り巻く電子からなるラザフォード（Ernest Rutherford, 1871–1937）の原子模型を出発点とするそれを，自身の土星型模型の延長線上にあるものと理解して関心を抱いたようである．大正 2 年（1913 年）のニュートン祭後にボーアに送られたはがき（1913 年 12 月 27 日付）には，論文送付への謝辞があるという[4)]．

日本からの新領域への寄与は，しかし，長岡に

は全く不十分に思われたようである．長岡は，明治 43 年のヨーロッパ視察の際，シュタルク（Johannes Stark, 1874–1957）やウィーン（Wilhelm Wien, 1864–1928）といったかの地の物理学者たちが，日本の物理学者が依然として従事し続けている地磁気や重力の測定などの「器械的」な作業，あるいは「街路を小売商人が千篇一律に商品を呼ばりつつ歩くも同然」な作業を蔑視し，基礎研究を重視視してこれに邁進する様子に強い共感を覚え，帰国後は，国際的な共同事業であるにしても日常業務的色彩の強い観測に時間と労力を奪われる日本の物理学者に，研究の重点をより基礎的な領域に移して，「模倣的国民なり」との批評から脱すべく努力しようと訴えている[5)]．

19 世紀末以来新たな発見が続き，20 世紀初頭に量子論と相対論が現れると，多くの物理学者は，自分たちの研究領域が，ニュートン力学が物質の世界の基礎理論としての地位を失う可能性さえ見込まれる重大な局面に向いつつあることを実感するようになった．鋭敏な感覚を持つものはこの変革に何らかの寄与をしたいと考え，長岡の場合にはそのような貢献が日本からなされることを望んだのであった．

日本の研究が「器械的」であるとの印象はよほど強いものであったのであろう．長岡は，ヨーロッパ視察中に知ったオランダのオネス（Heike Kamerlingh Onnes, 1853–1926）の研究を評価し，彼をノーベル賞に推薦しているが（1913 年受賞），通常は研究への評価以外はあまり書かれない推薦状には，日本の科学がまだ揺籃期にあり（in its infancy），研究の大半が日常業務的（routine）であるため同国人を推薦できないことを残念に思うとの感想が記されている．その上で，日本からの受賞者が現れるとすればそれは次の世代においてであろうとの期待も述べられている[6)]．

長岡の嘆きのみに注目していると，日本には基礎理論に関わるめぼしい研究がなかったかのような印象を抱いてしまうが，それは正しくない．相対論に関しては桑木彧雄（1878–1945）や石原純（1881–1947）の研究があり，後者はまた量子論についてもドイツ語の論文を発表していた．石原は疑問視されることの多かったアインシュタインの光量子仮説に注目し，明治 44 年（1911 年）にこれを擁護する長い論文を書き，さらに留学中の大正元年（1912 年）には，光量子仮説によって説明できる事例としてアインシュタインが言及している，光化学当量を取り上げた研究を発表した．大正 3 年（1914 年）に帰国した後も量子論研究は続き，翌年には，ドイツのゾンマーフェルト（Arnold Johannes Sommerfeld, 1868–1951）より半年早く一般化量子条件の構想に至った[7)]．

石原は以後も研究を続け，大正 8 年（1919 年）には帝国学士院恩賜賞を受賞するが，大正 10 年（1921 年）には恋愛問題により勤務先の東北帝国大学を休職し，科学ジャーナリズムに活動の場を移した．後から眺めると，量子論を用いた理論研究を日本で行っていたほぼ唯一の研究者であった石原のこの分野での活動の終焉は，細々とではあれ着実に継続しており，さらに新たな展開を見せたかもしれない日本の量子論研究全体の，一定期間にわたる停滞をもたらしたように思われる．

17.2 若い世代の学習：京都

ヨーロッパでは，1925 年から翌年にかけて行列力学と波動力学が発表され，新たに形式の整った量子力学が誕生していた．こうした動きに直接関わった日本人はいなかったが，物理学上の変革についての情報は日本にも伝わってきており，特に若い物理学者たちを興奮させた．

京都帝国大学を大正 12 年（1923 年）に卒業し，第三高等学校（三高）で力学を教えていた堀健夫（1899–1994）もそのような若者の一人であり，三高の生徒たちに向って，電子が波だとか粒だとかいうのは古臭くてだめだ，京都大学でこういうことの分かる先生は一人もいないなどとまくしたてた[8)]．堀の放言は，少なくとも 2 人の生徒——湯川秀樹（当時は小川秀樹）と朝永振一郎（1906–1979）——の記憶には残った．2 人とも，ほんの二，三年前のアインシュタイン来日の際の大騒ぎを記憶

しており，難解といわれる相対論に関心を抱いていたが，堀の言葉によって，理論物理学への憧れはさらに強まった．

堀が義兄でもある朝永は，物理学関連の情報に触れる機会も多かったであろう．一つ年下の湯川とは中学校も一緒であったが，朝永は規定通り 5 年通って卒業し，4 年で終えて進学した湯川と三高で同学年となった．昭和元年（1926 年）には，相対論・量子力学への関心もあって，ともに京都帝大の物理学科に進学した．

分光学の実験家であった堀は，量子力学に近い領域を専門としてはいたが，理論研究を自身で行ったわけではない．また，堀が語ったとおり，京都帝大の教官には量子力学を専門とする理論研究者はいなかった．京都で量子力学それ自体の研究が始まっていったのは，湯川・朝永の世代の前後の学生の自発的な活動によってであった．

帝国大学では 3 年になると専門の研究が始まるが，病弱であった朝永は，立ったままでの作業の多い実験は諦め，堀の話を思い出して量子力学の理論研究を行うこととした．近い分野の教官には木村正路（1883–1962）がいたが分光学実験が専門であり，理論を専門とする玉城嘉十郎（1886–1938）は相対論までが研究対象であった．ただし，玉城の研究室には，田村松平（1904–1994）や，哲学者の西田幾多郎（1870–1945）の次男の外彦（1901–1949）がおり，独自に量子力学の論文を読み進めていたので，これに加わりつつ自分で卒業研究を行うこととした．湯川は，物理学科進学の頃から，あまり迷うことなく量子力学の研究を志しており，西田外彦に相談しながら先端の研究を独習していたが，卒業研究にはやはり玉城の研究室を選んだ．こうして，昭和 3 年（1928 年）頃には，玉城研究室の片隅に量子力学に憧れる数名の若者が集うこととなった．

量子力学の学習といっても，当時は欧文でも手頃な教科書はなく，学術雑誌の論文をそのまま読んで理解に努めるのが主な活動であった．雑誌は大学にあり，必要であれば高価ではあったが書店を介して抜き刷りを購入する方法もあった．多くの場合これを手書きで写し，ときにはガリ版刷りで数人が共有した．そうして入手した論文を，仲間どうしで議論を闘わせながら読むというよりは，互いがどこまで進んだかを意識しあいながら，自分の関心にあわせて咀嚼していくというのが，当時の湯川や朝永らの学習方法であった[9]．

玉城研究室で行われていたのは，特筆することもない若者の勉強会であったようにも思われる．しかし，湯川・朝永よりやや年長の山内恭彦（1902–1986）は，後年の座談会で，よい競争相手のいた湯川と朝永をうらやみ，東京にいた自分には話し相手がいなかったと述べている[10]．東京帝国大学の物理学科の山内の友人には，菊池正士（1902–1974）や坪井忠二（1902–1982）がいたが，どちらも実験に進んでおり，理論研究の相談相手としてはやや不足であった．1920 年代初めに反相対論に突き進んだ土井不曇（1895–1945）の場合も，留学等で相談相手がいなくなり，研究の性格は次第に独善的なものになっていった．同年代の数人の集団の中で，関心の近い相手を意識しながら学習や研究を進めるといった形態は，充分に能力（数学，物理学と語学）のある若者が，新たな理論を吸収するのには適していたのであろう．

相対論との比較でいえば，四半世紀にわたる試行錯誤の末に量子力学ができ上がる頃には，理論研究のおおよその規則——保存則は変更しない，特殊相対論との共存を目指す，など——が明確化しつつあり，これが新規の挑戦者の参入を容易にしたともいえる．

17.3 若い世代の学習：東京

山内のいた東京では，湯川・朝永よりもやや早くから量子力学の勉強会が開かれていた．京都とは異なっていたが，その形態はやはり物理学の変革への若々しい関心を反映していた．

大正 11 年（1922 年）に東京帝国大学の物理学科を卒業し，大学院に入学した鈴木昭（1898–1988）によれば，大学の演習で長岡が取り上げたもののなかに，1911 年のソルヴェー会議の報告書があ

り，また週に1回，やはり長岡が中心になって最新の論文を学生が担当して紹介する「談話会」(「懇話会」とも呼ばれた) でも，遅くとも大正 12 年頃までには，量子論関連のものが取り上げられたようである．一言ずつくぎって話す癖のある学生に，長岡は，「君のしゃべり方はまるで quantum だ，quantum でなくしゃべり給え」と言ったという[11]．新しい情報を求めて卒業生も参加するこの会で，長岡自身も量子論関係の論文を紹介することがあった．

長岡は量子論を講義でも取り上げており，昭和元年に物理学科を卒業した坪井によれば，定年直前の大正 14 年 (1925 年) のことであろうか，講義中，「今日イギリスから来た報告によるとッ，電子にも回転があるということであるッ」と学生に告げたという[12]．坪井は，長岡ともなれば世界各国から新発見の報告があるのかと驚いたが，実際には学術誌に掲載されたスピンに関する短報を「報告」と呼んだのであった．数年のちの昭和 3 年には，後期 (3 年) の学生向けに坂井卓三 (1900–1954) が量子力学の講義を始め[13]，昭和 5 年 (1930 年) には「原子構造及量子力学」が必修科目となった[14]．

教員の出席する物理学教室の談話会では，長岡の詰問にあって学生が卒倒しかけたこともあったようである．また，物理を専門としない人々が多く参加するようになって初歩的な質問が増え，学生たちは次第に不満を募らせていった．そこで，昭和元年には，大学院生たちが中心となって，理化学研究所 (理研) の集会室で忌憚なく最新の物理学の成果について議論しあう会 (「物理学輪講会」) が設けられた．年長者でも寺田寅彦 (1878–1935) や西川正治 (1884–1952) は出席できたが，希望すれば誰でも入れるというわけではなく，主要な構成員が投票で参加の可否を決めた[15]．この物理学輪講会は，寺田の紹介もあって，昭和 2 年 (1927 年) には，量子力学関連の欧文論文の和訳を中心とした『物理学文献抄　第一輯』を岩波書店から刊行し，翌年には第二輯も出した (いずれも物理学輪講会同人編)．

物理学輪講会の中心となったのは，土井，鈴木，藤岡由夫 (1903–1976)，中谷宇吉郎 (1900–1962) らで，菊池や坪井も加わった．土井はやはり反相対論で有名であったようであり，後年，物理学輪講会について知った朝永は，同じ大学に務めていたことがあったためかふだんは「フドン」と呼んでいたと回想し，相対論には反対したものの，「量子力学のほうには反対されなかった」と紹介した[16]．土井は，反相対論で一敗地にまみれて再起できなかったというわけではなく，量子論研究に新たな活動の場を見出していた．

輪講会同人の活躍に，彼らの後輩たちも刺激された．湯川・朝永と同世代で東京にいた小谷正雄 (1906–1993) や犬井鉄郎 (1905–1989) は，昭和 2 年には中期 (2 年) の学生であったが，行列力学の論文などを，他の理論研究に関心のある学生と手当たり次第に読んだという[17]．

17.4 日本の研究者たちの成果：1920 年代後半

量子力学の登場から数年の後には，日本からもこの理論と密接な結びつきをもつ研究が発表されるようになった．

電子が波的な性質をもつことは，理論によって示唆されてはいても，実験で示すためには工夫が必要であったが，1927 年には，アメリカのベル研究所のデーヴィソン (Clinton Joseph Davisson, 1881–1958) とガーマー (Lester Halbert Germer, 1896–1971) が，金属に電子線を照射する実験を行ううちに電子の波的な性格を示す散乱が起こることを発見した．これを知った菊池は，当時，東京帝大の大学院生であったが，デーヴィソン・ガーマーの実験を自分も行おうと考え，大学院を退学して，昭和 3 年の春に，理研の西川の研究室に移った[18]．当時，西川の研究室はエックス線回折実験に関する世界的な中心の一つであった．

菊池は当初，デーヴィソン・ガーマーに倣って，100 電子ボルト程度の低速の電子線をニッケルの単結晶に照射して散乱パターンを得ようとしたが，この実験は理研で到達できる真空では成功しなかっ

た．アメリカの大電話会社が抱えるベル研究所は，優れた真空ポンプを保有しており，デーヴィソンとガーマーは，世界の他の機関では容易に到達できない超高真空の下で電子線散乱実験を行っていた．同時期，イギリスのトムソン（George Paget Thomson, 1892–1975）も電子線散乱の実験を行っていたが，高度の真空の下でなくとも実現できる，数万電子ボルトの高速電子線の金属箔による散乱を選択した．

菊池も高速電子線を用いたが，これを，薄い雲母膜に照射した点がトムソンとは異なる．電子線の発生には注射針を用い，輸入した雲母塊から手作業で薄片をはがすという準備が必要であったが，撮影できた回折パターンは鮮明であり，昭和3年に日本を訪れたゾンマーフェルトも菊池の実験について知りたがったという．1930年に刊行されたハイゼンベルク（Werner Karl Heisenberg, 1901–1976）の『量子論の物理的基礎』にも菊池の実験への言及がある[19]．

実験から10年のちの1937年には，ガーマーとトムソンはノーベル物理学賞を受賞した．選考の際に提出された両者の業績の評価書には菊池の名前も並べられており，受賞者たちのそれに匹敵する研究であることは認められていた．ただし，受賞するためには推薦されていなければならず，誰からも推薦を受けていなかった菊池は，候補者の比較の対象ではあっても，自身が受賞する可能性はなかった[20]．

菊池は，昭和4年（1929年）になるとドイツへ私費留学し，ボルン（Max Born, 1882–1970）やハイゼンベルクとともに理論研究に従事した．日本が戦勝国となった第一次大戦の後，数年間は留学は比較的容易であり，菊池以前から，仁科芳雄（1890–1951）や杉浦義勝（1895–1960）など，現地で新理論に触れ，優れた研究を行った者がいた．

仁科は，大正7年（1918年）に東京帝大の電気工学科を卒業したのち，物理学を研究対象に選び，理研から派遣されて大正10年（1921年）にイギリスに渡り，次いでコペンハーゲンのボーアの下に移った．そこでエックス線分光学実験に従事しつつ最新の量子論・量子力学を吸収し，1928年には，スウェーデン人のクライン（Oskar Klein, 1894–1977）とともに，ディラック（Paul Adrien Maurice Dirac, 1902–1984）の相対論的な波動方程式を用いて，電子によるエックス線散乱の公式（「クライン・仁科の式」）を導いた[21]．

杉浦は東京帝大の物理学科を大正9年（1920年）に卒業したのち，理研の長岡研究室で分光学の研究を行ったが，大正13年末にヨーロッパに渡り，昭和2年には，ゲッティンゲンにおいて，ハイトラー（Walter Heinrich Heitler, 1904–1981）・ロンドン（Fritz Wolfgang London, 1900–1954）の理論に基づいて水素分子の化学結合に関する説明を与えた[22]．

17.5 海外との接触

自身ではまだ留学には出られない大学生であっても，本場で最新の研究に接してきた物理学者たちが帰国して行う講演を聴くことにより，論文を読む以外の経路で新たな知識を得ることができる．量子力学導入期の日本でもこの事情は変わらなかった．ただし，自身で勉学を進めていた湯川や朝永のような若者たちは，この知識を一方的に受け取るばかりであったわけではなく，すでに講演者の質を見抜けるまでに成長を遂げていた．

昭和4年には杉浦が京都帝大で講義を行い，湯川と朝永に研究課題を与えようとした．しかし，のちに誤りであることがわかる実験の説明を課題とされた湯川は，杉浦の勧めを断った．朝永は与えられた積分の計算を行ったが，数式を連ねたプリントを配って早口で話す杉浦は，よい印象を与えなかったようである[23]．

昭和6年（1931年）に仁科がやはり京都帝大で行った講義は，湯川・朝永の両者に高く評価されている．講義の内容もよかったのであろうが，この時点ですでに独自の研究を手がけるようになっていた2人にとっては，自分たちの理解が誤ってはいないと確認する機会が得られたことの意義が大きかった．また，仁科には，同様の関心を持ち

ながら接触のなかった小林稔（1908–2001）や坂田昌一（1911–1970）を，湯川・朝永に引き合わせるといった懐の深さもあった[24)]．

海外からの訪問者の講演も，最新の知識を得るための，また日本の研究がどのあたりに位置しているかを知るための，よい機会となった．昭和3年12月にはゾンマーフェルトが来日し，既述の通り菊池の電子線散乱実験について知りたがったが，気体の磁化率の測定を行った曽禰武（1887–1988）の名も知っていた．東京帝大でゾンマーフェルトの講義を聴いた有山兼孝（1904–1992）は，これによって，量子力学は原子・分子を扱うのみならず「大きな塊としての物質の性質」とも結びついていると初めて実感したという[25)]．

昭和4年9月にはハイゼンベルクとディラックが講演を行った．まだ二十代の若者であった2人の偉業を長岡が称え，出世に汲々とする日本の若者が刺激を受けることを望むと述べたが，その場に居合わせた曽禰は，長岡がハイゼンベルクの名に「先生」の敬称をつけたのを聞き逃さなかった．この物理学界の長老は，日頃，偉い仕事をしたら，弟子に対しても先生というと公言していたが，それに似た事態が生じたのである[26)]．湯川・朝永の世代はまた，ハイゼンベルクら量子力学の創始者が自分たちと数歳違うのみの，「紅顔の」と評してよい青年であることにも感慨を覚えていた．

17.6 新たな展開

1930年代に入る頃から，日本で行われる研究は新たな展開を見せるようになっていた．その兆候は，菊池の電子線散乱の場合のように，ヨーロッパの研究者と同様の成果にほぼ同時期に到達するという現象（同時発見）が，しばしば起こるようになったことに表れていた．

大学卒業後，湯川や朝永は独自の研究を試みるようになっていた．湯川は，卒業論文でディラックの方程式を取り上げたのち，さらに原子の超微細構造についての新たな計算結果を幾つか得ていた．これを玉城に提出すると，玉城は見ておくと約束したが，その前にイタリアのフェルミ（Enrico Fermi, 1901–1954）がより進んだ研究を発表してしまった（昭和5年）．湯川はまた，波動関数を位相空間の中で考えることに違和感を覚えていたため，ヨルダン（Ernst Pascual Jordan, 1902–1980）とクラインが第二量子化の論文を発表すると，その意義をただちに理解したという[27)]．

同時発見は，ヨーロッパとは別に量子力学研究の拠点を築きつつあった当時のアメリカにもよく見られた現象で，1920年代前半から頻発していた．実際に論文として『フィロソフィカル・マガジン』（*Philosophical Magazine*）などに発表した場合でも，著者名が注意を引かなかったためか，ヨーロッパの研究者に無視されることがあったが，1925年頃までには，スレーター（John C. Slater, 1900–1976）のスピンに似た着想がハウトスミット（Samuel Abraham Goudsmit, 1902–1978）とユーレンベックの論文の中で言及されているように，アメリカの雑誌で発表された研究も国外からの関心を集めるようになっていた[28)]．

昭和7年（1932年）に仁科に誘われて理研に移った朝永は，宇宙線や原子核に関心を広げる仁科の下で，中性子による物質原子の励起，イオン化の断面積の計算，重水素の結合のエネルギーの計算を行い，昭和8年（1933年）から10年（1935年）にかけて日本数学物理学会で結果を発表した．しかし，多忙な仁科はそれらを論文にまとめる時間がとれず，朝永が焦っているうちに，ベーテ（Hans Albrecht Bethe, 1906–2005）とパイエルス（Rudolf Ernst Peierls, 1907–1995）が同等の結果を発表してしまった[29)]．

優れた着想に至っても，研究者が無名であれば，荒唐無稽な思いつきとして無視されることもある．やはり昭和7年に大阪帝国大学に移って独自に研究を進めていた湯川が，昭和9年（1934年）に中間子論の構想に至った場合がそうであった．量子力学がほぼ完成を見た後，理論研究者の関心は，量子電気力学の完成と，原子核の構造の解明などに移っていたが，後者については，原子核を構成する核子（陽子，中性子）を結びつける力を，既知の

粒子（電子，ニュートリノ）の核子間での交換によって説明しようとする方向が主流であった．これに対し湯川は，核子間の粒子の交換で力を説明する方針には倣ったが，既知の粒子を用いるのではなく，力の性質がうまく説明できる未知の粒子（中間子）の存在を仮定した．この構想は昭和9年に日本数学物理学会で発表され，翌年には英文論文として刊行された[30]．

中間子論を高く評価したのは，発表当初は仁科，菊池，朝永程度であった．昭和12年（1937年）に仁科の尽力によりボーアが来日した際，仁科が湯川の中間子論について話すと，ボーアは「新しい粒子が好きか」と揶揄した[31]．同年，理研から派遣されてライプツィヒで研究を行っていた朝永は，ハイゼンベルクが中間子論を，大変面白いが本当だか嘘だか分からない研究だと評するのを聞いた[32]．

ところが，1936年から翌年にかけて，アメリカで宇宙線中に新粒子が発見されたことが報じられ，1937年にはそれが湯川の予言した粒子ではないかと指摘されるようになった．予期されていなかった新粒子の発見により，湯川の示した方法が正しいと判断する研究者が増え，1938年に入るとハイゼンベルクも中間子論に注目して「ユカワ」の名を盛んに口にするようになった[33]．研究が進むと，新粒子の性質が湯川理論の示すものとは異なっていることや，発表したままの中間子論には不十分な点があることなども明らかになっていったが，新たな方向性を示した湯川の功績の大きさは揺るがなかった．昭和14年（1939年）には，湯川は前年に死去した玉城の後任として京都帝大教授に就任し，また日本から初めてソルヴェー会議に招待された．

1940年のノーベル物理学賞には，オランダのコステル（Dirk Coster, 1889–1950）と長岡が湯川を推薦した．菊池の電子線散乱でさえノーベル賞に値すると考えなかった長岡は，このとき初めて日本人を推薦したが，その推薦状には，充分な自信を持って初めて日本人を推薦するという短い感想が記されている[34]．

17.7 サイクロトロン

量子力学の誕生によって確立した理論研究は，日本の若者たちが参加するのに好適な領域であった．西洋の最新の成果を独自に吸収できる語学や数学・物理学の能力をもった若者は，第一次大戦後の日本には一定数存在しており，また科学においては新興国であった日本からは，新理論に沿って躊躇なく新規な発想を提示することができた．

しかし，日本の物理学者たちは実験研究においても奮起していた．その意欲は，例えば湯川理論の躍進を支えようという努力に現れており，新粒子の発見が報じられると，理研の仁科らは粒子の質量を陽子の7分の1から6分の1であるとする見積りを提供した．昭和15年（1940年）頃には，仁科は，湯川の予言した粒子を実験的に発生させるためには，数千トンの電磁石をもつサイクロトロンが必要であるが，アメリカのローレンス（Ernest Orlando Lawrence, 1901–1958）はこの規模の機器の建造を目指していると理解しており，日本発の理論の成否を日本の研究者の手で明らかにしたいと焦慮するようになった．

原子核研究のための加速器，サイクロトロンをアメリカに次いで昭和12年に稼動させたのは日本の仁科らであった．このとき完成した機器は電磁石の重量が23トンほどで世界第二の規模であったが，仁科はこの機器の完成以前から，200トン程度のさらに大きなサイクロトロンの建設を構想していた．しかし，必要な精度の資材を日本でそろえることは困難であり，同じ規模の機器の建設を計画していたローレンスの協力により，彼が同じものを2組アメリカで作らせ，それを理研が購入して組み立てることとした．そのほうが安かったのである．組み立ては日本のほうが早く，昭和14年2月には，世界最大のサイクロトロンが完成したと報じられた[35]．

大サイクロトロンと呼ばれた新たな機器は，しかし，組み立て完了後も稼動しなかった．この規模になると，小型の機器の大規模化のみでは成功せず，電力を充分に伝えるための工夫や，真空ポン

プの強力化が必要であった．さらに大きな数千トン規模の機器による湯川粒子の生成を構想し，200トンの機器の成功をそこに至るための重要な段階であると考えていた仁科らは，当初は独自の改良を試みたが不調に終わり，昭和15年8月には，矢崎為一（1902–1970）らをローレンスの下に送って，機器改造のための指導を仰いだ．

ローレンツの研究所の人々は，初めは矢崎らを丁寧に指導した．ところが今回は，ローレンス自身は指導に立ち会わず，図面も詳細なものは提供されなかった．原子爆弾開発に連なる計画が既に発足しており，サイクロトロンに関する情報は，すでに軍事機密に属しつつあったためである．

今回は，量子力学の受容期に日本の物理学が飛躍的な成長を遂げた過程を検討した．次回からは，この成長の後に迎えた第二次大戦の下で物理学者たちが見せた言動を，いままでにあまり知られていない事例を中心に紹介していく．前々回・前回同様，アメリカと日本を取り上げることとする．

参考文献

1) Stanley Coben, “The Scientific Establishment and the Transmission of Quantum Mechanics to the United States, 1919–32,” *American Historical Review*, **76:2** (1971), pp.442–466.
2) Silvan S. Scheweber, *QED and the Men Who Made It: Dyson, Feynman, Schwinger, and Tomonaga* (Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1994).
3) 板倉聖宣・木村東作・八木江里『長岡半太郎伝』（朝日新聞社，1973年），374–381ページ．
4) Léon Rosenfeld, “Introduction,” in Niels Bohr, *On the Constitution of Atoms and Molecules* (Copenhagen: Munksgaard; New York: W.A. Benjamin, 1963), pp.XI–LIII.
5) 板倉ほか，前掲[3]，『長岡半太郎伝』，381–384ページ．
6) 岡本拓司，「ノーベル賞文書からみた日本の科学，1901年–1948年——物理学賞・化学賞——」，『科学技術史』**3**号，1999年，87–128ページ．
7) 西尾成子，『科学ジャーナリズムの先駆者 評伝 石原純』（岩波書店，2011年），110–171ページ．
8) 岡本拓司，「三高時代の湯川秀樹と朝永振一郎」，『日本物理学会誌』，**57**巻**6**号，2002年6月，419–420ページ．
9) 岡本拓司，「湯川秀樹と朝永振一郎：交流の軌跡」，『日本物理学会誌』，**61**巻**12**号，2006年12月，905–911ページ．
10) 『朝永振一郎著作集　10』（みすず書房，1983年），150ページ．
11) 勝木渥，『量子力学の曙光の中で』（星林社，1991年），59ページ．
12) 坪井忠二，「西片町から弥生町まで」，鈴木信太郎編，『赤門教授らくがき帖』（鱒書房，1955年），119–131ページ．
13) 勝木渥，『曽禰武　忘れられた実験物理学者』（績文堂出版，2007年），208–209ページ．
14) 中山正敏，「日本の量子力学受容期．II. 坂井卓三の講義」，年会講演予稿集（日本物理学会），39:4，1984年3月12日，216ページ．
15) 勝木，前掲[11]，『量子力学の曙光の中で』，75ページ．
16) 『朝永振一郎著作集　11』（みすず書房，1983年），119ページ
17) 勝木，前掲[13]，『曽禰武』，216–217ページ．
18) 菊池記念事業会編集委員会編・発行，『菊池正士　業績と追想』（1978年）．
19) Werner Heisenberg, *Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie* (Leipzig: S. Hirzel, 1930), p.57.
20) 岡本拓司，前掲[6]，「ノーベル賞文書からみた日本の科学」，106–107ページ．
21) 中根良平・仁科雄一郎・仁科浩二郎・矢崎裕二・江沢洋編，『仁科芳雄往復書簡集　III』（みすず書房，2007年）．
22) 板倉ほか，前掲[3]，『長岡半太郎伝』，514ページ．
23) 『朝永振一郎著作集　10』，前掲[10]，276ページ；『湯川秀樹著作集　7』（岩波書店，1989年），106ページ．
24) 江沢洋，「湯川・朝永と日本の基礎物理学」，『日本物理学会誌』，**61**巻**12**号，2006年12月，884–890ページ．
25) 勝木，前掲[13]，『曽禰武』，204–205ページ．
26) 勝木，前掲[13]，『曽禰武』，206–207ページ．
27) 佐藤文隆監修，『新編　素粒子の世界を拓く—湯川・朝永から南部・小林・益川へ』（京都大学学術出版会，2008年）．
28) K.R. Sopka, *Quantum Physics in America, 1920–1935* (New York: Arno Press, 1980), pp.2.59–2.64.
29) 『朝永振一郎著作集　別巻1』（みすず書房，1985年），42–43ページ．
30) Hideki Yukawa, “On the Interaction of Elementary Particles. I,” *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan*, Third Series, **17** (1935), pp.48–57.
31) 『朝永振一郎著作集　10』，前掲[10]，131ページ．
32) 『朝永振一郎著作集　11』，前掲[16]，246ページ．
33) 『朝永振一郎著作集　11』，前掲[16]，248–253ページ．
34) 岡本拓司，前掲[6]，「ノーベル賞文書からみた日本の科学」，103–104ページ．
35) 岡本拓司，「原子核・素粒子物理学と競争的科学観の帰趨」，金森修編，『昭和前期の科学思想史』（勁草書房，2011年），105–183ページ．

（おかもと・たくじ，東京大学大学院総合文化研究科）

特　集（2014年1月号予告）

波と粒子

「光子の裁判」を通して見る量子の不思議

本体952円

巻頭言	細谷　暁夫
「光子の裁判」と量子の不思議	江沢　洋
名作「光子の裁判」レビュー	島田　一平
現代からみた「光子の裁判」と測定の問題	小澤　正直
「光子の裁判」とエンタングルメント	高木　伸
実験からみた「光子の裁判」	枝松　圭一
巨視的量子世界からみた「光子の裁判」	仙場　浩一
「光子の裁判」と宇宙の古典性	南部　保貞
［コラム］	飯沼　昌隆
［コラム］	渡辺美帆子

特　集（2013年11月号）

理論物理と実験物理の交錯

刺激しあい発展する姿に迫る

本体952円

巻頭言	橋本　幸士
素粒子標準理論の興隆と黄昏	萩原　薫
ヒッグス粒子の発見と素粒子物理学実験の展開	駒宮　幸男
トポロジカル物質の理論的発見	古崎　昭
物性物理学と新規物質 超伝導体とトポロジカル絶縁体を例として	安藤　陽一
重力（理論） 重力波源と高エネルギー天体の記述	田中　貴浩
重力（観測） KAGRA 稼働と重力波の実測に向けて	梶田　隆章 田越　秀行
超弦理論と実験 ホログラフィー理論と重イオン実験	夏梅　誠
ハイゼンベルグの不確定性関係の実験的検証	藤川　和男
《連載》 例題形式で探求する 微積分学の基本定理　その6	森田　茂之
情報幾何の新展開　その26	甘利　俊一
科学と社会　その16	岡本　拓司

編集後記

今回の特集はいかがでしたでしょうか．佐藤先生の巻頭記事を読むと，何かの“存在”を探っていくと，また“存在”を探らなければならないような感じがしますが，記事で仰っているように新世界の探険という気がします．

小誌は一足先に年末を迎えます．来年も科学の新世界を見られるような出来事がたくさん起こることを楽しみにしております．（R）

＊　　＊

物理学における「存在」を考えてみると，何かが在るか無いかというだけではなく，複数の物事が関係しあってそれぞれの存在が成り立ってもいるのだと感じました．また，物理学発展の歴史を振り返ると物質，力，場などの存在の発見や探求による寄与は大きいように思います．物理学において存在を考えることは重要であり，本特集は深く物理の世界の不思議に迫る内容になったと思います．（T）

数　理　科　学　12月号

2013年12月1日発行

数理科学編集部　　発行人　木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 ⓒ 株式会社 サイエンス社　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁